

ME-05 Matrix Operations, Special Matrices & Transpose

Source PDF pages 17-28

Choose valid operations, calculate each entry, explain multiplication order and distinguish transpose from inverse.

[Foundations](#) | [Derivations](#) | [Source examples](#) | [Worked example](#) | [Independent practice](#) | [Türkçe support](#) | [Hint levels 1 and 2](#) | [Solutions and English interpretations](#) | [Reflection and retry](#)

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

A matrix is an organised collection, not a bag of numbers

An $m \times n$ matrix has m rows and n columns. The entry a_{ij} is in row i , column j . Rows and columns have an ordered meaning; rearranging entries generally changes the matrix.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
m, n	Numbers of rows and columns	Satır ve sütun sayıları
a_{ij}	Entry at row i , column j	i . satır, j . sütundaki eleman
α	A scalar: one real number	Bir gerçel sayı, matris değil

[Türkçe explanation](#)

Why economists need matrix operations

Matrices package many related calculations. If columns are products and rows are inputs, multiplying by a product-quantity vector gives total input requirements. A coefficient matrix A in $Ax = d$ packages equations instead of a data table.

$$A_{m \times n} x_{n \times 1} = d_{m \times 1}$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
A	Coefficient or input-requirement matrix, as defined	Örneğe göre katsayı veya girdi ihtiyacı matrisi
x	Ordered variable/quantity column	Sırası sabit değişken/miktar sütunu
d	Result or constants column	Sonuç ya da sabitler sütunu

Türkçe explanation

Three operations answer different questions

$A + B$ combines matching entries. αA scales every entry. AB composes relationships by summing row-column products. Matrix multiplication is not entry-by-entry multiplication.

Türkçe explanation

Inner dimensions match; outer dimensions survive

For $A_{m \times n} B_{n \times p}$, each row of A and column of B contain n entries. Their n matched products can be added; there are m choices of row and p choices of column.

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Türkçe explanation

Order and grouping are different choices

AB may differ from BA ; one product may not exist. But compatible products satisfy $(AB)C = A(BC)$: parentheses may move without reversing the order A, B, C .

$(AB)C = A(BC)$, but AB is not generally BA

Türkçe explanation

Identity, zero and symmetry are properties with conditions

I_n is $n \times n$ with ones on the main diagonal and zeros elsewhere. $O_{m \times n}$ has zeros everywhere. A symmetric matrix satisfies $A^T = A$ and therefore must be square. The source also mentions variance-covariance matrices: they are symmetric because exchanging the two variables does not change covariance; no statistical derivation is supplied in the notes.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Türkçe explanation

Transpose changes the address, not the value

A^T (also A' in the notes) turns row i into column i . An $m \times n$ matrix becomes $n \times m$. Transpose is not inverse.

$$(A^T)_{ji} = a_{ij}$$

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-05-C1

A is 2×3 and B is 3×4 . Before calculating, which statement is correct?

- A. AB is 2×4 ; BA is undefined.
- B. Both AB and BA are 2×4 .
- C. AB is 3×3 .

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | [Check later](#)

ME-05-C2

A records kilograms per product and q records product quantities. Why does Aq add products within each row?

- A. Because every matrix operation adds all entries.
- B. Each term is kilograms for one product; adding gives total kilograms of that input.
- C. Because matrix multiplication is entrywise.

My choice and the reason, before checking

[Türkçe question support](#) | [Check later](#)

ME-05-C3

For $A_{2 \times 3}$ and $B_{3 \times 4}$, which transpose-product formula has the correct order and dimensions?

- A. $(AB)^T = A^T B^T$
- B. $(AB)^T = B^T A^T$
- C. $(AB)^T = AB$

My choice and the reason, before checking

[Türkçe question support](#) | [Check later](#)

Derivations with reasons**Entrywise operations**

Derive each result from the meaning of a position.

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Assume A and B are both $m \times n$. Combine only the same row and column.

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Multiply every entry by the same real number α ; the dimensions do not change.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (B+A)_{ij}$$

Scalar addition is commutative at every position, so matrix addition is commutative.

$$((A+B)+C)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

Scalar associativity gives $(A+B)+C = A+(B+C)$ when all three matrices have the same size.

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

At each position, $\alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}$.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Why the row-column rule works

Link n intermediate categories to form one result entry.

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Fix output row i and output column j . The shared index k runs from 1 to n .

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Multiply corresponding elements of row i and column j , then add all n products.

$$(AB)x: m \times n \cdot n \times p \cdot p \times 1 \rightarrow m \times 1$$

If B maps x into intermediate totals and A maps those totals into final totals, AB is the combined map.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Identity and the rules that preserve order

Check the algebra without importing false scalar rules.

$$I_m A_{m \times n} = A_{m \times n} = A_{m \times n} I_n$$

The left identity selects each row unchanged; the right identity selects each column unchanged.

$$A(B+C) = AB+AC; (A+B)C = AC+BC$$

Expand the sum within each row-column dot product. Keep the original left/right order.

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{\ell=1}^p (\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k\ell}) c_{\ell j}$$

For $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$, $C_{p \times q}$, expand the first grouping.

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} (\sum_{\ell=1}^p b_{k\ell} c_{\ell j}) = (A(BC))_{ij}$$

Regroup finite scalar sums and products; the same terms appear in the same matrix order.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Transpose identities, explained entry by entry

A' and A^T mean the same transpose here.

$$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = a_{ij}$$

Swap the address twice; recover A .

$$((A+B)^T)_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A^T + B^T)_{ij}$$

Transpose commutes with addition when A and B have the same size.

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

Use the product formula at the swapped position.

$$= \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$$

Each summand is a product of real numbers, so its two scalar factors may switch order. Thus $(AB)^T = B^T A^T$.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Source examples: equality and componentwise arithmetic

Rebuild the exact numerical examples from pp. 17-20.

Source PDF pages 17-20

$$A = B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A = B$ because all four positions match; $A \neq C$ and $B \neq C$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=7, x_2=5$$

Equality of column vectors means equality of corresponding entries.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

For two 2×2 matrices, add/subtract each matching pair.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 0+1 & -2+3 \\ 2+5 & 1+2 & 3+1 \end{bmatrix}$$

The two matrices are both 2×3 ; all six sums are valid.

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B+A$$

Evaluate the six sums; reversing addition gives the same entries.

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Scale every entry by 3.

[Türkçe source-example reasoning](#)

Source examples: compatible products

Track the exact dimension patterns and row-column expressions in pp. 21-22.

Source PDF pages 21-22

$$A_{2 \times 2} B_{2 \times 3} \rightarrow C_{2 \times 3}; B_{2 \times 3} A_{2 \times 2} \rightarrow \text{undefined}$$

The first inner pair is $2 = 2$; the reversed inner pair is $3 \neq 2$.

$A_{m \times n} B_{p \times q}$ is defined exactly when $n=p$; the result is $m \times q$.

This is the source general rule with the original dimension letters: p is the number of rows of B , and q is its number of columns.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

A 1×2 row times a 2×3 matrix gives a 1×3 row.

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}; c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}; c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}$$

Keep the A row fixed while moving through the three B columns.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

These are the square matrices introduced at the bottom of p. 22. Calculate both orders as a completed extension.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Each AB entry uses an A row and a B column.

$$BA = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \neq AB$$

Changing order changes the numerical result, not just the notation.

[Türkçe source-example reasoning](#)

Source examples: square, identity, zero and algebraic laws

Complete the examples on pp. 23-26 and the repeated rules on p. 27.

Source PDF pages 23-27

$$A_{3 \times 3} B_{3 \times 3} \rightarrow 3 \times 3; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Square means equal row and column counts; identity is a special square matrix.

$$I_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

The source left-identity example preserves both rows.

$$O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Both are zero matrices, but they are not equal because their sizes differ.

$$A_{2 \times 3} B_{3 \times 2} \rightarrow 2 \times 2; \quad B_{3 \times 2} A_{2 \times 3} \rightarrow 3 \times 3$$

Both products exist, but their different dimensions already prevent equality.

$$(A_m \times_n B_n \times_p) C_p \times_q \rightarrow m \times_q; \quad A_m \times_n (B_n \times_p C_p \times_q) \rightarrow m \times_q$$

The source associativity pattern requires B to be $n \times p$.

$$A+B=B+A; \quad (A+B)+C=A+(B+C); \quad A(B+C)=AB+AC; \quad (B+C)A=BA+CA; \quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

These source rules hold under their matching-dimension conditions; their reasons are derived above.

[Türkçe source-example reasoning](#)

Source examples: transpose and row comparisons

Complete the source transpose calculation rather than stopping at the displayed products.

Source PDF pages 27-28

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

The two rows of A become two columns of A^T .

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0^2+1^2+2^2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 3^2 + (-1)^2 + (-2)^2 \end{bmatrix}$$

A row times a column of A^T is a dot product of two rows of A.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 14 \end{bmatrix}; \quad (AA^T)^T = AA^T$$

Evaluate $0+1+4=5$, $0-1-4=-5$ and $9+1+4=14$.

$$B_{4 \times 2} B_{2 \times 4}^T \rightarrow 4 \times 4$$

The source also gives this dimension-only example: the inner dimension 2 matches, and the outer dimensions are 4×4 .

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & t \\ 4 & t & 2 \end{bmatrix}; \quad S^T = S; \quad I_3^T = I_3$$

The p. 28 source illustrates symmetry. The repeated off-diagonal handwritten digit is unclear; t preserves its matching positions without guessing its value.

$$(A^T)^T = A; \quad (A+B)^T = A^T + B^T = B^T + A^T; \quad (AB)^T = B^T A^T$$

These are the transpose properties listed on p. 28; the product order reverses.

Source reading note - PDF 28

In the notes: Small embedded symmetric-matrix example contains a repeated handwritten off-diagonal digit that is not unambiguously readable.

Checked form: Use the same symbol t in both positions; symmetry holds for every real t.

The source digit is not guessed. The example still teaches and verifies the exact symmetry relationship.

[Türkçe source-example reasoning](#)

Worked example

ME-05-W1 Two inputs, three products, one cost

A firm produces $q = (10, 20, 5)^T$ units of products 1, 2 and 3. The input matrix is $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$: row 1 is kilograms of material per unit of each product; row 2 is labour-hours per unit. The input-price row is $p = [4, 6]$, measured in currency units per kilogram and per labour-hour. Predict the dimensions, find $r = Aq$ and total cost $K = pr$, then verify $K = (pA)q$. If only product 1 rises by 2 units, find the change in each input and total cost. Assume constant input coefficients and input prices, and no other costs.

[Türkçe question](#) | [Interpretation answer after trying](#)

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

$$A_{2 \times 3} q_{3 \times 1} \rightarrow r_{2 \times 1}; \quad p_{1 \times 2} r_{2 \times 1} \rightarrow K_{1 \times 1}$$

Predict a two-entry input column and a single total-cost number.

$$r_1 = 2(10) + 1(20) + 3(5) = 20 + 20 + 15 = 55 \text{ kg}$$

Multiply each material coefficient by its product quantity and add.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$$r_2 = 1(10) + 2(20) + 0(5) = 10 + 40 + 0 = 50 \text{ labour-hours}$$

Repeat with the labour row.

$$r = \begin{bmatrix} 55 \\ 50 \end{bmatrix}; \quad K = 4(55) + 6(50) = 220 + 300 = 520$$

Price the 55 kilograms and 50 labour-hours, then add monetary costs.

$$pA = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

Alternatively find each product's input cost per unit first.

$$(pA)q = 14(10) + 16(20) + 12(5) = 140 + 320 + 60 = 520 = p(Aq)$$

The two groupings agree; order remains p, A, q.

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta r = A\Delta q = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Use the change vector: two extra units of product 1 require 4 extra kilograms and 2 extra hours.

$$\Delta K = p\Delta r = 4(4) + 6(2) = 16 + 12 = 28; \quad K_{\text{new}} = 520 + 28 = 548$$

Price the additional inputs; check $2 \times 14 = 28$ using unit cost.

Interpret before reading the model answer

In 2-3 exam-style sentences, interpret Aq , pA and your calculated cost increase. State why this is a conditional calculation rather than a forecast of profit.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-05-S1 Rebuild every operation

Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Compute $A + B$, $2A - B$, AB , BA and A^T . Identify which results establish that multiplication is not generally commutative. If A and B are two weekly production tables with rows = factories and columns = the same two products, explain which of these operations directly combines the two weeks and which product AB would need further labels to interpret.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-05-S1 Interpretation and verification

Explain why $A + B$ has a direct production interpretation but AB does not automatically have one, even though AB is mathematically defined.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-05-S2 Sales totals and a dimension error

A sales matrix is $Q = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, with rows = stores and columns = products. The common price column is $p = (5, 8, 10)^T$ currency units per item. Calculate store revenue Qp and total revenue. A student writes pQ instead. Diagnose the error, give Q^T , and state the correct dimensions of the left and right identity matrices in $I Q = Q = Q I$. Assume all recorded quantities are sold at these prices.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-05-S2 Interpretation and verification

Write a short revenue interpretation and explain why the result says nothing by itself about which store is more profitable.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-05-S3 Transpose is not an inverse

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Compute AB and $(AB)^T$; verify $(AB)^T = B^T A^T$. Explain why $A^T B^T$ cannot be substituted for it even though that product is also defined. Compute AA^T and decide whether it equals I_2 . For interpretation only, regard A as an index of resource requirements with rows = resources and columns = products, all quantities rescaled to dimensionless comparable units. What do diagonal and off-diagonal entries of AA^T compare?

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-05-S3 Interpretation and verification

Using the stated dimensionless resource indices, interpret your diagonal and off-diagonal entries of AA^T . Explain why they are not production totals or causal effects.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

A matrix is an organised collection, not a bag of numbers

Matris, sayıları yalnızca bir kutuya koymaz: her sayıya bir **adres ve anlam** verir. Bir tabloda satır fabrikayı, sütun ürünü gösteriyorsa a_{23} ikinci fabrikanın üçüncü ürününe aittir. Aynı sayıları başka yerlere koymak aynı bilgi değildir.

m ve n pozitif tam sayıdır. i satır numarasıdır $(1, \dots, m)$; j sütun numarasıdır $(1, \dots, n)$. Bu derste girişler gerçel sayılardır. Boyut her zaman **satır $\times$ sütun** sırasındadır. Matris eşitliği için hem boyut hem karşılıklı bütün girişler eşit olmalıdır.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

[Back to English](#)

Why economists need matrix operations

Örneğin bir ürünün kaç saat emek ve kaç kilogram malzeme kullandığını sütunlara koyarsak, üretim miktarlarıyla çarparak toplam kaynak ihtiyacını buluruz. Aynı biçim, önceki üniteye denklem sistemini kısa yazmak için kullanıldı: A katsayı matrisi, x bilinmeyenler sütunu, d sabitler sütunuydu.

A harfinin anlamı her örnekte açıklanmalıdır; bütün matrislerin otomatik olarak aynı ekonomik anlamı yoktur. Toplamadan önce aynı ürün/fabrika sırasını ve aynı ölçü birimini, çarpmadan önce birbirine bağlanan kategorileri kontrol et. Boyut uyumu matematiksel gerekliliktir; iktisadi anlam için etiket ve birim uyumu da gerekir.

$$A_{m \times n} x_{n \times 1} = d_{m \times 1}$$

[Back to English](#)

Three operations answer different questions

Toplama: aynı hücre anlamındaki iki dönemin miktarlarını birleştirir. **Skalerle çarpma:** bütün hücreleri aynı katsayıyla ölçekler; örneğin üretimi iki katına çıkarır. **Matris çarpımı:** ortak kategori üzerinden birleştirir: ürün başına emek $\times$ ürün miktarı, sonra ürünler üzerinden toplam.

$A+B$ için iki matrisin boyutu aynı olmalı. AB için A 'nın sütun sayısı B 'nin satır sayısına eşit olmalı. Farklı kuralları ezber listesi olarak değil, yapılan işin gereği olarak oku.

[Back to English](#)

Inner dimensions match; outer dimensions survive

İç boyut n , üzerinden toplama yaptığımız ortak kategoridir. Örneğin A 'nın sütunları üç ürün, B 'nin satırları aynı sıradaki üç ürün ise her ürün eşleşir. Sonucun m satırı ilk matristen, p sütunu ikinci matristen gelir.

İşlemi yapmadan önce cevap kutusunu $m \times p$ çiz. Böylece bir yanlış boyutu uzun hesap sonunda değil baştan fark edersin. İç sayılar eşit değilse eksik veya fazladan bir eşleştirme vardır; çarpım tanımsızdır, sıfır değildir.

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

[Back to English](#)

Order and grouping are different choices

Değişme (commutative), AB yerine BA yazmaktır; genelde geçerli değildir. **Birleşme (associative)**, sırayı koruyup önce hangi ikiliyi hesapladığını değiştirmektir; uygun boyutlarda geçerlidir.

Ekonomik zinciri düşün: ürün miktarlarından girdi miktarlarına, girdilerden maliyete geçiyorsun. Ara toplamı önce hesaplayabilir ya da ürün başına maliyeti önce bulabilirsin. Ama “fiyatları üretim miktarlarıyla ters sırada çarpmak” aynı ekonomik işlem değildir.

$(AB)C = A(BC)$, but AB is not generally BA

[Back to English](#)

Identity, zero and symmetry are properties with conditions

I birim matristir: doğru boyutla çarpıldığında girdiyi değiştirmez. O sıfır matrisidir: her hücre sıfırdır ve kare olmak zorunda değildir. Ana köşegen sol üstten sağ alta uzanır. Kare matrisin satır ve sütun sayısı aynıdır; her kare matris birim ya da simetrik değildir.

Simetri $a_{ij}=a_{ji}$ demektir. Kimlik matrisi simetriktir. Bir iktisadi veri tablosunun kare olması karşılıklı ilişkilerin eşit olduğunu kanıtlamaz. Notlardaki “variance-covariance matrix” ifadesi bir uygulama hatırlatmasıdır: kovaryans matrisi simetriktir çünkü $cov(X_i, X_j) = cov(X_j, X_i)$. Notta bunun istatistiksel hesabı verilmediği için burada yeni bir istatistik ünitesi eklemiyoruz.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Back to English](#)

Transpose changes the address, not the value

Transpoz alırken a_{ij} değerini değiştirmeden yeni matrisin j . satır, i . sütununa taşırsın. İki kez bu işlemi yapınca başlangıca dönersin. Sütun vektörünün transpozu satır vektörüdür.

A^T hemen her boyutta tanımlıdır; A^{-1} ise sonraki üniteye ele alınacak, yalnızca terslenebilir kare matrisler için tanımlıdır. $A^T A$ veya AA^T genelde I değildir. Üstteki T bir kuvvet sayısı değil, işlemin adıdır.

$$(A^T)_{ji} = a_{ij}$$

[Back to English](#)

ME-05-C1 Question support

Önce iç boyutları karşılaştır; sonra dış boyutlarla sonuç kutusunu belirle.

[Return to foundations](#)

ME-05-C2 Question support

Bir satırın her teriminin hangi birime dönüştüğünü düşün.

[Return to foundations](#)

ME-05-C3 Question support

AB önce 2×4 olur; bunun transpozu 4×2 olmalı.

[Return to foundations](#)

Entrywise operations

Matris cebirini sayılar cebirine hücre hücre indiriyoruz.

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

A ve B aynı boyutta olmazsa karşılığı olmayan hücreler oluşur. Aynı boyut ve aynı ekonomik etiketler altında i, j adresindeki iki sayıyı toplar veya çıkarırız; başka hücrelere dokunmayız.

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$$

α bir sayıdır. Örneğin $\alpha = -2$ ise sıfırlar yine sıfır, pozitifler negatif, negatifler pozitif olur. Sadece bir satırı çarpmak αA değildir; tüm girişler çarpılır.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (B+A)_{ij}$$

Bu bir örnek değil, her i, j için gerekçedir. Boyutlar aynı ve bütün karşılıklı girişler eşit olduğundan matrisler eşittir.

$$((A+B)+C)_{ij} = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$$

Parantezler değişti, A,B,C sırası değil. Her hücrede sayıların birleşme özelliği geçerli olduğu için matrislerde de geçerlidir.

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

Skalerin dağıtılması, her hücrede sayısal dağılma özelliğidir. Toplamdaki iki matrisin aynı boyutta olması gerekir.

[Back to English](#)

Why the row-column rule works

Ortak ürün/kategori üzerinden eşleştir, çarp ve topla.

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

i sonuçtaki satırı, j sonuçtaki sütunu seçer. k aradaki eşleştirme indeksidir: A'nın k. sütunu B'nin k. satırıyla eşleşir. p, B'nin sütun sayısıdır.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Σ "toplam" işaretidir; burada k=1'den n'ye kadar terimleri ekle demektir. Her sonuç hücresi bir toplamdır; yalnız $a_{ij}b_{ij}$ değildir. Bu tanım doğrusal bileşimleri art arda uygulamayı temsil eder.

$$(AB)x: m \times n \cdot n \times p \cdot p \times 1 \rightarrow m \times 1$$

B önce uygulanır çünkü x'in yanındadır. A(Bx) ifadesi önce Bx, sonra A ile çarpım demektir. Yazıdaki soldan-sağa matris sırasını ekonomik işlemin uygulanma sırasıyla karıştırma.

[Back to English](#)

Identity and the rules that preserve order

Uygun boyut koşulunu her kuralın parçası olarak tut.

$$I_m A_{m \times n} = A_{m \times n} = A_{m \times n} I_n$$

I_m 'nin i. satırı yalnız i. konumda 1 taşır; çarpımda A'nın i. satırının katsayısı 1, diğerlerinin katsayısı 0 olur. Sağdaki I_n de sütunları aynı şekilde seçer. Dikdörtgen A için soldaki ve sağdaki birim matris aynı boyutta değildir.

$$A(B+C) = AB+AC; (A+B)C = AC+BC$$

İlk eşitlikte $b_{kj}+c_{kj}$ her a_{ik} ile çarpılır: $a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}$. İkinci eşitlikte $(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}$ açılır. Sonuçları toplarken hiçbir matrisi diğerinin üzerinden geçirmiyoruz; AC yerine CA yazılamaz.

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{\ell=1}^p (\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{k\ell}) c_{\ell j}$$

Burada ℓ , B'nin sütunları/C'nin satırları arasında dolaşan ikinci toplama indeksidir; q son matrisin sütun sayısıdır. İlk çarpım AB boyutu $m \times p$, son sonuç $m \times q$ olur.

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} (\sum_{\ell=1}^p b_{k\ell} c_{\ell j}) = (A(BC))_{ij}$$

Sonlu toplamda sayıların toplama/çarpma özellikleriyle gruplayabiliriz. BC boyutu $n \times q$, $A(BC)$ boyutu yine $m \times q$ olur. Her i,j girişi eşit olduğundan $(AB)C=A(BC)$. Bu gerekçe $AB=BA$ iddiası içermez.

[Back to English](#)

Transpose identities, explained entry by entry

Transpoz kurallarında özellikle çarpımın sırasını neden ters çevirdiğimizi gösteriyoruz.

$$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = a_{ij}$$

İlk işlem i,j adresini j,i yapar; ikinci işlem geri çevirir. Değer değişmediği için $(A^T)^T=A$.

$$((A+B)^T)_{ij} = a_{ji}+b_{ji} = (A^T+B^T)_{ij}$$

Toplamanın ilgili girişini taşısak da önce girişleri taşıyıp sonra toptasak da $a_{ji}+b_{ji}$ elde ederiz. Ayrıca matris toplaması değişmeli olduğu için $A^T+B^T=B^T+A^T$.

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

A $m \times n$, B $n \times p$ ise AB $m \times p$ ve transpozu $p \times m$ olur. i şimdi $1, \dots, p$, j ise $1, \dots, m$ aralığındadır.

$$= \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$$

Burada a_{jk} ve b_{ki} birer sayıdır; sayısal çarpmanın değişme özelliğini kullanıyoruz, matrislerin değil. B^T $p \times n$, A^T $n \times m$ olduğu için doğru sonuç $p \times m$. Tüm girişler eşit olduğundan kural elde edilir.

[Back to English](#)

Source examples: equality and componentwise arithmetic

Kaynak sayılar korunmuştur; her hücreyi ayrı kontrol et.

Source PDF pages 17-20

$$A = B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A ve C aynı sayıları içerir ama aynı adreslerde değil. Örneğin $a_{12}=0$, $c_{12}=-3$. Eşit olmamaları için tek bir farklı hücre yeterlidir; boyutun aynı olması tek başına yetmez.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=7, x_2=5$$

İki adet 2×1 matris eşit: ilk satırlar $x_1=7$, ikinci satırlar $x_2=5$ verir. Vektörde sıra önemlidir; x_1 ile x_2 'yi değiştirmeyiz.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

Bu formül kaynak p18'deki genel 2×2 toplam/çıkarma kuralıdır. Artı seçersen bütün hücrelerde toplama; eksi seçersen $A-B$ sırasıyla çıkarma yaparsın.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 0+1 & -2+3 \\ 2+5 & 1+2 & 3+1 \end{bmatrix}$$

İlk satırdaki üç toplamı sonra ikinci satırdakileri yap. İkinci matrisin ilk satırını birinci matrisin ikinci satırına eklemek adresleri bozar.

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B+A$$

$-1+0=-1$; $0+1=1$; $-2+3=1$; $2+5=7$; $1+2=3$; $3+1=4$. Bu örnek toplamının değişme özelliğini gösterir. AB 'nin de değişmeli olduğunu göstermez.

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Kaynak p20'deki altı girişin hepsini 3 ile çarptık. -1 girişinin sonucu -3 'tür; sıfır 0 kalır. Boyut yine 2×3 .

[Back to English](#)

Source examples: compatible products

Her çarpımın önce boyutunu, sonra girişlerini belirle.

Source PDF pages 21-22

$$A_{2 \times 2} B_{2 \times 3} \rightarrow C_{2 \times 3}; B_{2 \times 3} A_{2 \times 2} \rightarrow \text{undefined}$$

Öndeki (lead) ve arkadaki (lag) matris sırası sonucu belirler. İkinci ifade “farklı bir cevap” değil; standart matris çarpımı olarak tanımsızdır.

$A_m \times_n B_p \times q$ is defined exactly when $n=p$; the result is $m \times q$.

Kaynak p21’de B’nin boyutunu $p \times q$ diye adlandırır. Bu gösterimde A’nın n sütunu B’nin p satırıyla eşleşmeli: $n=p$. Sonuç A’dan m satır, B’den q sütun alır. Üstteki türetmelerde B doğrudan $n \times p$ yazılarak eşleşme baştan sağlanmıştı; harfler farklı adlandırıldı ama kural aynıdır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

A’nın tek satırı, B’nin üç sütunuyla ayrı ayrı çarpılır. Her çıktı iki terimli toplamdır.

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}; c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}; c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}$$

İlk hücrede B’nin ilk sütunu (b_{11}, b_{21}), ikincide ikinci sütunu (b_{12}, b_{22}), üçüncüde üçüncü sütunu (b_{13}, b_{23}) kullanılır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Kaynak bu iki 2×2 matrisi verir. Aşağıda hesaplamayı tamamlıyoruz; her iki çarpım da tanımlı olduğu için gerçek bir değişimeme örneği elde ederiz.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Sol üst: $-1+4=3$; sağ üst: $0+4=4$; sol alt: $-3+8=5$; sağ alt: $0+8=8$.

$$BA = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \neq AB$$

Bu kez satırlar B'den, sütunlar A'dan geldi. Sonuçların boyutu aynı ama girişleri farklı. "Matris çarpımı genelde değişmeli değildir" demek hiçbir özel durumda $AB=BA$ olamaz demek değildir.

[Back to English](#)

Source examples: square, identity, zero and algebraic laws

Kaynakta tekrarlanan kuralları aynı yerde, tüm boyut koşullarıyla ele alıyoruz.

Source PDF pages 23-27

$$A_{3 \times 3} B_{3 \times 3} \rightarrow 3 \times 3; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3×3 iki matrisin çarpımında iç boyutlar $3=3$ ve dış boyutlar 3×3 . I_2 ve I_3 'te yalnız ana köşegen 1, bütün diğer girişler 0. Kare olmak, köşegenin 1 olması anlamına gelmez.

$$I_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Her hücrede bir 1 ve bir 0 doğru satırı seçer. Sağdan çarpacak olsaydık 2×3 matris için I_3 gerekirdi: $A I_3 = A$. $A I_2$ boyutsal olarak tanımsızdır.

$$O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sıfır matris kare olmak zorunda değildir. Boyutu yazmak karışıklığı önler. Örneğin $A_{2 \times 3} + O_{2 \times 3} = A$ olur; $A_{2 \times 3} + O_{2 \times 2}$ tanımsızdır.

$$A_{2 \times 3} B_{3 \times 2} \rightarrow 2 \times 2; B_{3 \times 2} A_{2 \times 3} \rightarrow 3 \times 3$$

Kaynak p25'teki örnekte iki iç boyut da uyumludur. Yine de farklı boyutlu sonuçlar aynı matris olamaz. Bu, "iki çarpım da tanımlıysa eşittir" hatasını düzeltir.

$$(A_m \times_n B_n \times_p) C_p \times_q \rightarrow m \times q; A_m \times_n (B_n \times_p C_p \times_q) \rightarrow m \times q$$

A'nın n sütununu karşılayabilmek için B'nin n satırı; C'nin p satırını karşılayabilmek için B'nin p sütunu gerekir. Parantezler değişir, matris sırası korunur.

$$A+B=B+A; (A+B)+C=A+(B+C); A(B+C)=AB+AC; (B+C)A=BA+CA; \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

Toplama kurallarında tüm toplananlar aynı boyutta; çarpmalı kurallarda ilgili çarpımlar tanımlı olmalı. Son eşitlik p27’de skaler α ile verilen dağıtma kuralıdır. Sağdan dağıtırken A' ’yı sola taşıyamayız.

[Back to English](#)

Source examples: transpose and row comparisons

p27’de A ve A^T açık verilmiş; satır-satır benzerlik çarpımını tamamlıyoruz.

Source PDF pages 27-28

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

0,1,2 birinci sütuna; 3,-1,-2 ikinci sütuna geçti. A 2×3 , A^T 3×2 . Negatif işaretler korunur; transpoz işaret değiştirmez.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0^2+1^2+2^2 & 0 \cdot 3+1 \cdot (-1)+2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 0+(-1) \cdot 1+(-2) \cdot 2 & 3^2+(-1)^2+(-2)^2 \end{bmatrix}$$

Ana köşegen aynı satırın kendisiyle çarpımıdır; köşegen dışı iki farklı satırın çarpımı. Özellikle $(-1)^2=1$, $(-2)^2=4$; parantezleri unutma.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 14 \end{bmatrix}; (AA^T)^T = AA^T$$

İki çapraz giriş eşit olduğundan sonuç simetrik. Ancak I_2 değildir; bu, A^T ’nin ters matris olmadığını gösterir. Kaynak p27’deki $B_4 \times_2 B^T_{2 \times 4}$ örneği de 4×4 sonuç verir; B ’nin sayısal girişleri verilmediği için sayı üretmiyoruz.

$$B_4 \times_2 B^T_{2 \times 4} \rightarrow 4 \times 4$$

B ’nin sayısal girişleri verilmemiştir; bu nedenle sayısal sonuç uydurmayız. B dört satır, iki sütun; transpozu iki satır, dört sütundur. BB^T dört satırı birbiriyle karşılaştıran 4×4 matris verir.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & t \\ 4 & t & 2 \end{bmatrix}; S^T = S; I_3^T = I_3$$

Kaynak görselindeki (2,3) ve (3,2) girişlerinin aynı yazıldığı açık; fakat küçük fotoğrafta sayının 7 mi 9 mu olduğu kesin seçilemiyor. Bu nedenle t ile gösteriyoruz: t herhangi bir gerçel sayı olduğunda da $0=0$, $4=4$, $t=t$ eşleşmeleri simetriyi kanıtlar. 1,3,2 köşegen girişleri yer değiştirmez. Kimlik matrisi de kendi transpozuna eşittir.

$$(A^T)^T=A; (A+B)^T=A^T+B^T=B^T+A^T; (AB)^T=B^TA^T$$

Kaynakta $AB=C$ için C $m \times p$ iken C^T $p \times m$ olur. Formülün ayrıntılı gerekçesi bu ünitenin transpoz türetmesinde verildi. Aynı sayfadaki ters matris konusu ME-07’de, bağımsızlık konusu ME-06’da ayrıntılı ele alınır.

Kaynak okuma notu - PDF 28

Okunamayan rakamı tahmin ederek kesin sayı diye sunmadık. İki karşılıklı girişte aynı t kullanılması, kaynakta amaçlanan simetri ilişkisini eksiksiz korur.

[Back to English](#)

ME-05-W1 Worked example support

Bu tablo gerçek bir hesap zinciri tanımlar: ürün miktarı → toplam malzeme ve emek → toplam değişken girdi maliyeti. Satırlardaki farklı fiziksel birimleri doğrudan toplayamazsın; fiyatla çarpıp aynı para birimine dönüştürünce maliyetleri toplayabilirsin. Çözümü açmadan önce r’nin kaç girişli ve K’nın hangi birimde olacağını yaz.

$$A_2 \times_3 q_3 \times_1 \rightarrow r_2 \times_1; p_1 \times_2 r_2 \times_1 \rightarrow K_1 \times_1$$

r_1 malzeme kilogramı, r_2 emek saatidir. p ’nin ilk fiyatı malzemeye, ikincisi emeğe aittir. Çarpımda sıraları aynı tutuyoruz; K skaler olarak okunabilen 1×1 sonuçtur.

$$r_1 = 2(10)+1(20)+3(5) = 20+20+15 = 55 \text{ kg}$$

Birinci ürün 20 kg, ikinci 20 kg, üçüncü 15 kg kullanır. Hepsi aynı girdinin kilogramı olduğundan toplam 55 kg anlamlıdır.

$$r_2 = 1(10)+2(20)+0(5) = 10+40+0 = 50 \text{ labour-hours}$$

Üçüncü ürüne ait sıfır bu basit modelde doğrudan emek gereksinimi olmadığı varsayımıdır; ürünün gerçek hayatta hiç maliyeti olmadığını söylemez. İki girdi toplamının birimleri farklıdır.

$$r = \begin{bmatrix} 55 \\ 50 \end{bmatrix}; K = 4(55) + 6(50) = 220 + 300 = 520$$

4 para/kg $\times$ 55 kg = 220 para; 6 para/saat $\times$ 50 saat = 300 para. Birimler sadeleşerek aynı para birimine dönüştüğü için toplam 520 olur.

$$pA = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

Birinci ürünün bir birimi 2 kg ve 1 saat kullanır: $8+6=14$. İkinci ürün $4+12=16$, üçüncü $12+0=12$. Sonuç 1×3 ürün-başına maliyet satırıdır.

$$(pA)q = 14(10) + 16(20) + 12(5) = 140 + 320 + 60 = 520 = p(Aq)$$

Bu birleşme özelliğinin iktisadi anlamıdır. Önce toplam kaynak sonra maliyet veya önce birim maliyet sonra miktar aynı toplamı verir. p, A, q sırasını ters çevirmedi.

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \Delta r = A\Delta q = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Δ değişim demektir: yeni değer eksi eski değer. Sabit A altında $A(q+\Delta q) - Aq = A\Delta q$; bu doğrusal dağılma özelliğinden gelir, yeni bir davranış varsayımı değildir.

$$\Delta K = p\Delta r = 4(4) + 6(2) = 16 + 12 = 28; K_{\text{new}} = 520 + 28 = 548$$

Sonuç bağımsız biçimde ürün 1'in birim maliyetiyle kontrol edilir: 2 adet $\times$ 14 para/adet = 28 para. Yeni girdi vektörü $(59, 52)^T$, maliyet $4 \times 59 + 6 \times 52 = 548$ olur.

Aq ve pA 'nın birimlerini, bulduğun maliyet değişiminin ne anlama geldiğini ve varsayımları açıklayan 2-3 cümle yaz.

[Return to the worked example](#)

ME-05-S1 Question support

Önce beş boş 2×2 kutu çiz. Toplama/çıkarma ve skaler işlemleri hücre hücre; AB ve BA 'yı satır-sütun yap. Otomatik sayısal kontrol yalnız AB 'nin dört girişini denetler; diğer sonuçları ve yorumu çözümle kendin karşılaştır.

$A+B$ 'nin anlamını belirt; AB 'nin sırf boyutu uygun diye anlamlı bir üretim toplamı olmadığını açıkla.

[Return to the problem](#)

ME-05-S2 Question support

Her mağazanın üç ürün satışını aynı fiyatlarla değerlendir. Geliri kârla karıştırma. Toplam geliri bulurken iki mağazanın para cinsinden sonuçları toplanabilir.

Gelir farkını sayısal yaz; kâr karşılaştırması için hangi eksik bilgiye ihtiyaç olduğunu söyle.

[Return to the problem](#)

ME-05-S3 Question support

Bu soru iki yanlış genellemeyi test eder: “transpozda sıra değişmez” ve “ A^T ters matristir”. Kaynak ihtiyacı için burada birimsiz standartlaştırılmış indeks kullandık; kilogram ile saat karelerini aynı fiziksel birim gibi yorumlamıyoruz.

Satırların kendiyle ve birbiriyle çarpımını yorumla; bu sayıları kaynak toplamı ya da neden-sonuç etkisi diye adlandırma.

[Return to the problem](#)

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-05-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

[Return and try](#) | [If still stuck, hint 2](#)

ME-05-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

[Return and try](#) | [If still stuck, hint 2](#)

ME-05-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

[Return and try](#) | [If still stuck, hint 2](#)

Hints Level 2 One useful next move

ME-05-S1

For AB , row 1 is $[3,1]$ and column 2 of B is $[2,3]$; their dot product is not 1×2 .

Önce $A+B$ 'de aynı adresleri eşleştir. AB 'de $(1,2)$ girişi $3 \times 2 + 1 \times 3$ olmalı. BA 'da kullanılan satır ve sütunlar değişir.

[Return and complete your attempt](#)

ME-05-S2

Revenue is a row of quantities times the price column. Write $(2 \times 3)(3 \times 1)$ before calculating.

İlk mağaza için $4 \times 5 + 6 \times 8 + 2 \times 10$. pQ sırasının iç boyutlarını ayrıca kontrol et.

[Return and complete your attempt](#)

ME-05-S3

AB is 2×2 ; $B^T A^T$ is 2×2 , but $A^T B^T$ is 3×3 .

Önce boyutla adayları ayır. AA^T 'nin $(1,2)$ girişi A 'nın iki satırının iç çarpımıdır.

[Return and complete your attempt](#)

Solutions and model interpretations

ME-05-W1 Model interpretation

The plan requires 55 kg of material and 50 labour-hours, while pA gives input costs of 14, 16 and 12 currency units per product unit. Two additional units of product 1 raise input cost by 28 currency units, assuming unchanged technology and input prices. This is not a profit forecast because output revenue and any other costs are not specified.

Aq toplam fiziksel kaynakları; pA ise ürün başına parasal girdi maliyetlerini verir. Üretim artışı yalnız birinci üründe olduğundan A'nın birinci sütunu iki kez eklenir: +4 kg, +2 saat. Bunları fiyatlandırınca +28 para çıkar.

İşaret pozitiftir çünkü bu örnekte ilave üretim pozitif miktarda fiyatlandırılmış girdi gerektirir. Sabit teknik katsayı ve fiyat varsayımı yoksa eski birim maliyetleri doğrudan kullanamazdık. Satış fiyatı ve diğer maliyetler bilinmediği için kârın arttığını söylemek hatalıdır.

Check the explanation

- ☐ Distinguishes total input quantities from costs per product.
- ☐ Reports 4 additional kg, 2 additional labour-hours and 28 currency units.
- ☐ Conditions the result on fixed coefficients/prices and does not claim profit rises.

ME-05-S1 Solution

$$A+B = \begin{bmatrix} 3+1 & 1+2 \\ 2+0 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Add matching entries.

Aynı fabrikanın aynı ürününü iki hafta boyunca toplarız; ekonomik etiketler aynı sırada olmalıdır.

$$2A-B = \begin{bmatrix} 6-1 & 2-2 \\ 4-0 & 8-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Scale all four A entries, then subtract B entry by entry.

Önce $2A = [[6,2],[4,8]]$ olur. B'nin bütün girişleri doğru adresten çıkarılır; $2(A-B)$ yazmak farklı işlemdir.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Use each A row against each B column.

Dört toplam sırasıyla $3+0=3$, $6+3=9$, $2+0=2$, $4+12=16$.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \neq AB$$

Use B rows against A columns.

Sol üst 7 ile 3 farklı; dolayısıyla matrisler eşit değil. Bazı hücrelerin eşit olması bütün matrislerin eşitliğine yetmez.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Move each A row into a column.

$A_{12}=1$, transpozun (2,1) girişine; $A_{21}=2$, transpozun (1,2) girişine gider. Köşegen 3 ve 4 aynı yerde kalır.

Model English interpretation

$A + B$ gives two-week output for each factory-product pair if both weeks use the same units and ordering. AB is a valid numerical matrix product, but the columns of A are products while the rows of B are factories; the supplied labels do not define a shared economic category. Therefore AB cannot automatically be read as two-week production.

Türkçe reasoning

Boyutların ikisinin de 2 olması etiketlerin aynı olduğu anlamına gelmez. A sütunundaki “ürün 1” ile B satırındaki “fabrika 1” yalnız numarası aynı diye eşleştirilemez. Bu örnek boyut uyumunun gerekli fakat iktisadi yorum için tek başına yeterli olmadığını öğretir.

Check your explanation

- ☐ $A+B$ totals matching factory-product cells across weeks.
- ☐ AB is defined algebraically but its shared dimensions do not match the supplied categories.
- ☐ Does not interpret AB as total production.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

[Retry from the blank problem](#)

ME-05-S2 Solution

$Q_2 \times_3 p_3 \times_1 \rightarrow 2 \times 1$; $p_3 \times_1 Q_2 \times_3$ is undefined ($1 \neq 2$)

Check conformability before arithmetic.

pQ için iç boyutlar 1 ve 2 farklıdır; bu işlem sadece “yanlış sıra” değil, tanımsız çarpımdır.

$$Qp = \begin{bmatrix} 4 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 + 48 + 20 \\ 15 + 40 + 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 \\ 125 \end{bmatrix}$$

Price and sum each store's product sales.

Ürün adedi $\times$ para/adet = para. Birinci mağaza 88, ikinci 125 para gelir elde eder.

Total revenue = $88 + 125 = 213$

Add the two store revenues.

İki sonuç aynı para birimi ve döneme ait olduğundan toplanabilir. Satış miktarlarının hepsinin verilen fiyatlardan satıldığı varsayıldı.

$$Q^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}; \quad I_2 Q = Q = Q I_3$$

Transpose swaps store and product axes; identity sizes differ.

Q^T satırları artık ürünler, sütunları mağazalardır. I_2 solda iki mağaza satırını, I_3 sağda üç ürün sütununu korur.

Model English interpretation

Store revenues are 88 and 125 currency units, for a total of 213; store 2 earns 37 more in sales revenue. This does not establish higher profit because the stores' costs are not given. The calculation assumes all listed units are sold at the common fixed prices.

Türkçe reasoning

$125 - 88 = 37$ yalnız satış geliri farkıdır. Daha yüksek kira, personel veya ürün tedarik maliyeti bu farkı aşabilir. Matris çarpımı burada fiyatlandırmayı düzenler; tüketici davranışı ya da gelecekteki satış miktarı hakkında nedensel tahmin yapmaz.

Check your explanation

- ☐ Reports revenues 88 and 125 and total 213 in currency units.
- ☐ Store 2 revenue exceeds store 1 by 37.

☐ No profit ranking without costs.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

[Retry from the blank problem](#)

ME-05-S3 Solution

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Compute all four row-column sums.

Sonuç 2×2 . Üst sağ $1+6+0=7$; alt sol $0+1+0=1$, yani AB simetrik değildir.

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}; \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Transpose each matrix without changing values.

AB'nin 7 ve 1 girişleri yer değiştirir. B^T 2×3 , A^T 3×2 olur.

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = (AB)^T$$

Verify the reversed-order identity numerically.

Dört girişin tamamı eşit. $A^T B^T$ ise $(3 \times 2)(2 \times 3)$ olduğundan 3×3 olur; tanımlıdır ama 2×2 matrisle eşit olamaz.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1^2 + 2^2 + 0^2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 0^2 + 1^2 + 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \neq I_2$$

The row-comparison matrix is symmetric, but not the identity.

Ana köşegen 5 ve 10, çapraz girişler 2. I_2 'nin köşegeni 1 ve çaprazı 0 olmalıydı. Üstelik A dikdörtgen olduğundan burada sıradan iki taraflı A^{-1} zaten tanımlı değildir.

Model English interpretation

The diagonal entries 5 and 10 measure the sums of squared indices in the two resource profiles; the off-diagonal 2 is their dot product. These compare the specified profiles rather than calculate total resources used, since no production quantity vector is applied. They are not causal effects and are not a normalized correlation measure.

Türkçe reasoning

Birinci profil (1,2,0), ikincisi (0,1,3). Kendiyle çarpım 5 ve 10; iki profilin aynı ürünlerdeki indeks çarpımlarının toplamı 2'dir. Bu değerler ölçeğe bağlıdır ve bir korelasyon katsayısı gibi -1 ile 1 arasında olmak zorunda değildir. Toplam kaynak için ayrıca ürün miktarı q gerekir ve işlem Aq olur.

Check your explanation

- ☐ Diagonal entries are sums of squared row indices.
- ☐ Off-diagonal 2 is the dot product of the two resource profiles.
- ☐ No output quantity vector or causal model is supplied.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

[Retry from the blank problem](#)

Concept check answers

ME-05-C1 Answer A

The shared dimension is 3; the output keeps 2 rows and 4 columns. BA would require $4 = 2$.

AB için $3=3$ eşleşir ve dış boyutlar 2×4 kalır. BA için 4 ile 2 eşleşmez. Tanımsız bir çarpıma "0" yazamayız. **If you chose differently:** Write the dimensions in the same order as the matrices. Do not compare only the outside numbers.

A ve B'nin boyutlarını çarpım sırasıyla yan yana yaz. İçteki sayılar eşit mi? Sıralamayı ters çevirdiğinde bu testi yeniden yap.

ME-05-C2 Answer B

The common product index disappears in the sum; the input category remains.

(kg/ürün) $\times$ ürün = kg. Aynı girdinin farklı ürünlerde kullanılan kilogramlarını toplarız. Satır hangi girdiyi anlattığını korur; ürün indeksi toplamda ortadan kalkar.

If you chose differently: Track the units of $a_{ij}q_j$, then ask what summing over j means.

Önce tek terimi oku: i girdisinin j ürünü için birim ihtiyacı $\times j$ ürünün miktarı. Sonra bütün ürünleri topla.

ME-05-C3 Answer B

B^T is 4×3 and A^T is 3×2 , giving 4×2 . The order reverses.

$B^T A^T$ boyutları $(4 \times 3)(3 \times 2)$ olduğundan 4×2 verir. $A^T B^T$ ise $(3 \times 2)(4 \times 3)$: iç boyutlar uyuşmaz. Boyut testi yanlış kuralı daha hesap yapmadan yakalar.

If you chose differently: Transpose both sizes, then test the product. The result must be 4×2 .

Her matrisin satır ve sütun sayısını değiştir. Sonra çarpımın iç sayıları eşleşiyor mu diye bak; sonuç mutlaka 4×2 olmalı.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. "Alone" means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I check dimensions and category labels before calculating.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can distinguish entrywise addition/scaling from row-column multiplication.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can explain why associativity preserves order and transpose reverses product order.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can interpret a labeled matrix result without inventing economic meaning.

Çözüm kapalıyken her hücrenin nereden geldiğini söyle. Bir hesap tutsa bile boyut, kategori sırası ve ölçü birimi uygun değilse ekonomik yorumu durdur. Birim/sıfır/simetrik matrisleri tanımlarından ayırt et; transpozunu ters matrisle karıştırma.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Visually verified PDF pp. 17-28, including high-resolution crops of embedded notes on pp. 27-28. Exact readable source examples are retained and completed; original W1/S1-S3 are separate. One repeated symmetric off-diagonal digit on p. 28 is uncertain and explicitly parameterized. All other calculations were independently recomputed. p. 28 inverse notes are covered in ME-07; p. 28 independence notes are covered in ME-06. No external theory is silently attributed to the notes.