

ME-08 Cramer's Rule, Taxed Income & Comparative Statics

Source PDF pages 43-46

Use Cramer's rule correctly, derive Y^* , C^* and T^* , and write precise economic interpretations of spending, tax and parameter changes.

[Foundations](#) | [Derivations](#) | [Source examples](#) | [Worked example](#) | [Independent practice](#) | [Türkçe support](#) | [Hint levels 1 and 2](#) | [Solutions and English interpretations](#) | [Reflection and retry](#)

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill "alone" just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

One unknown, one replaced column

For a square system $Ax=d$ with $\det(A) \neq 0$, Cramer's rule gives $x_j = \det(A_j)/\det(A)$. A_j is obtained by replacing only column j of A by d .

$$x_j = \det(A_j)/\det(A), \det(A) \neq 0$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
A_j	A with column j replaced by d	j . sütunu d ile değiştirilmiş A
$\det(A)$	Common nonzero denominator	Ortak, sıfır olmayan payda

[Türkçe explanation](#)

Three simultaneous economic equations

Income equals consumption plus autonomous investment and government spending. Consumption depends on disposable income, not gross income. Taxes contain a lump-sum part and an income-proportional part.

$$Y = C + I_0 + G_0; C = \alpha + \beta(Y - T); T = \gamma + \delta Y$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
Y	National income	Milli gelir
C	Consumption expenditure	Tüketim harcaması
T	Tax revenue/total taxes	Toplam vergi geliri
I_0	Autonomous investment	Otonom yatırım
G_0	Autonomous government expenditure	Otonom kamu harcaması
α	Autonomous consumption	Otonom tüketim
β	Marginal propensity to consume disposable income	Harcanabilir gelire göre marjinal tüketim eğilimi
γ	Lump-sum tax	Gelirden bağımsız götürü vergi
δ	Proportional income-tax rate	Oransal gelir vergisi oranı
$Y - T$	Disposable income	Harcanabilir gelir

Türkçe explanation

Which objects are given?

The endogenous variables are Y, C, T . Treat α, I_0, G_0, γ as given exogenous magnitudes and β, δ as given parameters. They can be varied one at a time in comparative statics.

Endogenous: Y, C, T . Given: $\alpha, I_0, G_0, \gamma, \beta, \delta$.

Türkçe explanation

Assumptions and economic admissibility

The notes assume $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \beta < 1$ and $0 < \delta < 1$. These imply $D = 1 - \beta(1 - \delta) > 0$. Positive equilibrium income additionally requires $\alpha + I_0 + G_0 - \beta\gamma > 0$.

$$D=1-\beta(1-\delta)>0; N=\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma; Y^*=N/D$$

Türkçe explanation

What comparative statics actually asks

A comparative-static derivative asks how an equilibrium changes when one specified exogenous magnitude or parameter changes, holding the rest fixed. It is not a statement about the speed of adjustment over time.

Change the cause → recompute equilibrium → interpret the sign and units

Türkçe explanation

Why does taxation reduce the spending multiplier?

An extra unit of income produces δ units of additional tax and $1-\delta$ units of additional disposable income. Consumption therefore rises by $\beta(1-\delta)$, not β .

Effective induced-consumption slope = $\beta(1-\delta)$; spending multiplier = $1/[1-\beta(1-\delta)]$

Türkçe explanation

Government spending is not a lump-sum tax

A one-unit G_0 increase enters demand directly. A one-unit γ increase first lowers disposable income, so its initial consumption effect is $-\beta$. Their multipliers differ in sign and magnitude.

$$\partial Y^*/\partial G_0 = 1/D; \partial Y^*/\partial \gamma = -\beta/D$$

Türkçe explanation

Tax revenue can rise while income falls

Raising γ lowers Y , but tax revenue still rises by $(1-\beta)/D$ per unit under the stated assumptions. The direct tax increase dominates the induced loss of proportional tax revenue.

$$\partial T^*/\partial \gamma = 1-\delta\beta/D = (1-\beta)/D > 0$$

Türkçe explanation

Finite changes versus local derivatives

With β and δ fixed, equilibrium is linear in α, I_0, G_0, γ , so constant multipliers give exact finite changes. Changes in β or δ alter D , so a derivative is generally a local approximation for a finite parameter change.

Exact when D fixed: $\Delta Y = \Delta G_0 / D$. Local when δ varies: $\Delta Y \approx (\partial Y^* / \partial \delta) \Delta \delta$

[Türkçe explanation](#)

Pause and test your understanding

ME-08-C1

To find consumption C by Cramer's rule when the unknown vector is $(Y, C, T)^T$, what is replaced?

- A. The first row
- B. The second column
- C. The third column

My choice and the reason, before checking

[Türkçe question support](#) | [Check later](#)

ME-08-C2

Which is the government-expenditure multiplier in this model?

- A. $-\beta/D$
- B. $1/D$
- C. δ

My choice and the reason, before checking

[Türkçe question support](#) | [Check later](#)

ME-08-C3

Assume $Y^* > 0$. What is the sign of $\partial Y^* / \partial \delta$ when $0 < \beta < 1$ and $D > 0$?

A. Positive, because tax revenue rises

B. Negative, because $\partial Y^* / \partial \delta = -\beta Y^* / D$

C. Zero, because δ is a parameter

My choice and the reason, before checking

[Türkçe question support](#) | [Check later](#)

ME-08-C4

A reported multiplier is 2.04 and G_0 increases by one monetary unit. Which interpretation is correct?

A. Income is 2.04% higher, regardless of the starting income.

B. Equilibrium income increases by about 2.04 monetary units, ceteris paribus.

C. Income reaches the new equilibrium in 2.04 periods.

My choice and the reason, before checking

[Türkçe question support](#) | [Check later](#)

Derivations with reasons**Put the taxed-income model into matrix form - pp43-44**

Separate endogenous quantities from given magnitudes.

Source PDF pages 43-44

$$Y = C + I_0 + G_0 \rightarrow Y - C = I_0 + G_0$$

Move consumption to the endogenous side.

$$C = \alpha + \beta(Y - T) = \alpha + \beta Y - \beta T \rightarrow -\beta Y + C + \beta T = \alpha$$

Expand consumption, then move the two income-dependent terms left.

$$T = \gamma + \delta Y \rightarrow -\delta Y + 0C + T = \gamma$$

Move proportional tax income left.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Use the same order Y,C,T in every equation.

$$D = 1 \cdot (1 \cdot 1 - \beta \cdot 0) - (-1) \cdot [(-\beta) \cdot 1 - \beta(-\delta)] + 0$$

Expand the determinant through the first row.

$$D = 1 + (-\beta + \beta\delta) = 1 - \beta + \beta\delta = 1 - \beta(1 - \delta) > 0$$

Factor β and use the parameter restrictions.

Source reading note - PDF 45

In the notes: One handwritten tax line shows a minus and one vector entry is labelled G.

Checked form: The consistent model is $T = \gamma + \delta Y$, with unknown vector $(Y, C, T)^T$.

The matrix, numerical example and subsequent derivatives all confirm the plus tax rule and T as the third unknown.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Find Y^* , C^* and T^* by Cramer's rule - p44

All three outcomes need their own replacement determinant.

Source PDF pages 44

$$E = I_0 + G_0; \quad A_Y = \begin{bmatrix} E & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Replace only the first column for income.

$$\det(A_Y) = E(1 - 0) - (-1)(\alpha - \beta\gamma) = E + \alpha - \beta\gamma = N$$

Expand along the first row.

$$Y^* = (\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0) / D$$

Divide the income determinant by D.

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & E & 0 \\ -\beta & \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma & 1 \end{bmatrix}; \det(A_c) = (\alpha - \beta\gamma) - E(-\beta + \beta\delta)$$

Replace the second column, then expand through the first row.

$$C^* = [\alpha - \beta\gamma + \beta(1 - \delta)(I_0 + G_0)]/D = Y^* - I_0 - G_0$$

Factor $-E(-\beta + \beta\delta)$ into $\beta(1 - \delta)E$.

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & E \\ -\beta & 1 & \alpha \\ -\delta & 0 & \gamma \end{bmatrix}; \det(A_t) = \gamma - (-1)(-\beta\gamma + \alpha\delta) + E\delta$$

Replace the third column and keep all three first-row terms.

$$T^* = [(1 - \beta)\gamma + \delta(\alpha + I_0 + G_0)]/D = \gamma + \delta Y^*$$

Collect the γ terms and compare with the tax rule.

$$Y^* - T^* = (1 - \delta)Y^* - \gamma; C^* = \alpha + \beta(Y^* - T^*)$$

Verify the disposable-income and consumption equations.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Government spending and lump-sum-tax effects - pp44,46

The notes ask for the effects on all three equilibrium variables.

Source PDF pages 44,46

$$Y^* = N/D; \partial N/\partial G_0 = 1; \partial D/\partial G_0 = 0$$

Recognize that G_0 changes the numerator only.

$$\partial Y^*/\partial G_0 = [1 \cdot D - N \cdot 0]/D^2 = D/D^2 = 1/D > 0$$

Apply the quotient rule and simplify.

$$C^* = Y^* - I_0 - G_0 \rightarrow \partial C^*/\partial G_0 = 1/D - 1 = (1 - D)/D = \beta(1 - \delta)/D > 0$$

Subtract the direct expenditure unit from the total income response.

$$T^* = \gamma + \delta Y^* \rightarrow \partial T^* / \partial G_0 = \delta / D > 0$$

Tax revenue responds through the higher income.

$$\text{At } D=0.49: \partial Y^* / \partial G_0 = 100/49 \approx 2.0408; \partial C^* / \partial G_0 = 51/49 \approx 1.0408; \\ \partial T^* / \partial G_0 = 15/49 \approx 0.3061$$

Evaluate the source example multipliers without premature rounding.

$$\partial Y^* / \partial \gamma = -\beta / D; \partial C^* / \partial \gamma = -\beta / D; \partial T^* / \partial \gamma = 1 - \delta \beta / D = (1 - \beta) / D$$

Differentiate the lump-sum-tax experiment separately.

$$\text{With fixed } \beta, \delta: \Delta Y^* = \Delta G_0 / D \text{ and } \Delta Y^* = -\beta \Delta \gamma / D$$

These finite changes are exact for isolated shocks to G_0 or γ .

Source reading note - PDF 46

In the notes: $1/[1 - \beta(1 - \delta)]$ beside $\partial Y^* / \partial G_0$ is labelled “tax multiplier”.

Checked form: It is the government-expenditure multiplier; the lump-sum-tax multiplier is $-\beta / D$.

The denominator includes tax leakage, but the variable being changed is G_0 .

[Detailed Turkish reasoning](#)

The income-tax-rate derivative - p46

Explain the negative effect on income and complete the consumption and tax-revenue responses.

Source PDF pages 46

$$N = \alpha + I_0 + G_0 - \beta \gamma; \partial N / \partial \delta = 0; D = 1 - \beta + \beta \delta; \partial D / \partial \delta = \beta$$

The numerator is fixed in an isolated δ change.

$$\partial Y^* / \partial \delta = (0 \cdot D - N\beta) / D^2 = -\beta N / D^2$$

Use the quotient rule with a changing denominator.

$$\partial Y^* / \partial \delta = -(\beta / D)(N / D) = -\beta Y^* / D < 0 \text{ when } Y^* > 0$$

Recognize N / D as equilibrium income.

$$\partial C^* / \partial \delta = \partial Y^* / \partial \delta = -\beta Y^* / D$$

Autonomous investment and government spending are unchanged.

$$\partial T^*/\partial \delta = Y^* + \delta(\partial Y^*/\partial \delta) = Y^*(1 - \delta\beta/D) = (1 - \beta)Y^*/D > 0$$

Use the product rule for δY^* .

[Detailed Turkish reasoning](#)

All 18 comparative-static derivatives - the p46 exercise completed

Three endogenous outcomes times six given magnitudes/parameters gives 18 derivatives. Let $Z = Y^* - T^* = (1 - \delta)Y^* - \gamma$.

Source PDF pages 46

$$\alpha: \partial Y^*/\partial \alpha = 1/D; \partial C^*/\partial \alpha = 1/D; \partial T^*/\partial \alpha = \delta/D$$

An autonomous-consumption increase raises income, consumption and taxes.

$$I_0: \partial Y^*/\partial I_0 = 1/D; \partial C^*/\partial I_0 = \beta(1 - \delta)/D; \partial T^*/\partial I_0 = \delta/D$$

Investment has the same induced-consumption mechanism as government spending.

$$G_0: \partial Y^*/\partial G_0 = 1/D; \partial C^*/\partial G_0 = \beta(1 - \delta)/D; \partial T^*/\partial G_0 = \delta/D$$

Government spending raises all three outcomes under the parameter restrictions.

$$\gamma: \partial Y^*/\partial \gamma = -\beta/D; \partial C^*/\partial \gamma = -\beta/D; \partial T^*/\partial \gamma = (1 - \beta)/D$$

Lump-sum taxes reduce income and consumption but increase revenue in this model.

$$\partial Y^*/\partial \beta = [(-\gamma)D - N(-1 + \delta)]/D^2 = [(1 - \delta)N - \gamma D]/D^2 = Z/D$$

Differentiate both N and D with respect to β .

$$\beta: \partial Y^*/\partial \beta = Z/D; \partial C^*/\partial \beta = Z/D; \partial T^*/\partial \beta = \delta Z/D$$

These three derivatives are positive if disposable income Z is positive.

$$\delta: \partial Y^*/\partial \delta = -\beta Y^*/D; \partial C^*/\partial \delta = -\beta Y^*/D; \partial T^*/\partial \delta = (1 - \beta)Y^*/D$$

For $Y^* > 0$, the signs are negative, negative and positive.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Bridge to the market-model review - bottom of p46

The notes move from income comparative statics to market comparative statics.

Source PDF pages 46 (bottom)

$$Q^D = a - bP; Q^S = -c + dP; Q^D = Q^S$$

Equilibrium joins the demand and supply relations.

$$a - bP = -c + dP \rightarrow a + c = (b + d)P \rightarrow P^* = (a + c) / (b + d)$$

Collect price terms and divide by the positive slope sum.

$$Q^* = a - b(a + c) / (b + d) = [a(b + d) - b(a + c)] / (b + d) = (ad - bc) / (b + d)$$

Substitute the equilibrium price and simplify.

[Detailed Turkish reasoning](#)

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Cramer's rule for the two-country model - p43

Reproduce the preceding inverse solution by replacing one column at a time.

Source PDF pages 43

$$K = \begin{bmatrix} a & -m_2 \\ -m_1 & b \end{bmatrix}; a = 1 - c_1 + m_1; b = 1 - c_2 + m_2; D = ab - m_1 m_2 > 0$$

Use temporary symbols a,b to keep the determinant readable.

$$K_1 = \begin{bmatrix} A_1 & -m_2 \\ A_2 & b \end{bmatrix}; \det(K_1) = A_1 b - (-m_2) A_2 = b A_1 + m_2 A_2$$

Replace the first column to solve for Y_1 .

$$Y_1^* = [(1 - c_2 + m_2) A_1 + m_2 A_2] / D$$

Divide by the determinant of the original coefficient matrix.

$$K_2 = \begin{bmatrix} a & A_1 \\ -m_1 & A_2 \end{bmatrix}; \det(K_2) = a A_2 - A_1 (-m_1) = a A_2 + m_1 A_1$$

Replace the second column for Y_2 .

$$Y_2^* = [(1 - c_1 + m_1)A_2 + m_1A_1]/D$$

The result agrees with the matrix inverse method.

Source reading note - PDF 43

In the notes: A simplified Y_1 numerator shows $1 - c_1 + m_2$.

Checked form: The unchanged lower-right coefficient is $1 - c_2 + m_2$.

$$Y_1^* = [(1 - c_2 + m_2)A_1 + m_2A_2]/D.$$

Türkçe source-example reasoning

The exact numerical source example - p45

Source inputs: $I_0=500$, $G_0=250$, $\alpha=200$, $\beta=0.6$, $\gamma=50$, $\delta=0.15$. Find equilibrium Y, C, T .

Source PDF pages 45

$$E = 500 + 250 = 750; D = 1 - 0.6(1 - 0.15) = 1 - 0.51 = 0.49$$

Compute autonomous spending and the common determinant.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.6 \\ -0.15 & 0 & 1 \end{bmatrix}; d = \begin{bmatrix} 750 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Write the numerical coefficient matrix and constant vector.

$$\det(A_v) = 750 + 200 - 0.6 \cdot 50 = 950 - 30 = 920; Y^* = 920/0.49 = 92000/49 \approx 1877.5510$$

Expand the income replacement determinant.

$$\det(A_c) = (200 - 30) - 750(-0.6 + 0.09) = 170 + 382.5 = 552.5$$

Use the first-row expansion shown in the notes.

$$C^* = 552.5/0.49 = 55250/49 \approx 1127.5510$$

Divide by the same D , not by a new determinant.

$$\det(A_t) = -30 + 30 + 50 + 112.5 = 162.5; T^* = 162.5/0.49 = 16250/49 \approx 331.6327$$

Complete the tax calculation left as a quotient in the source.

$$Y^* - T^* = 75750/49 \approx 1545.9184; 200 + 0.6(75750/49) = 55250/49$$

Check the original consumption equation using disposable income.

$$Y^* = C^* + 500 + 250; T^* = 50 + 0.15Y^*$$

All three original equations hold exactly with the fractions.

Source reading note - PDF 45

In the notes: Source rounds $Y^* = 1877.5$ and $C^* = 1127.5$ before completing checks.

Checked form: $Y^* = 92000/49$, $C^* = 55250/49$, $T^* = 16250/49$.

Keep exact fractions until the final display to avoid propagated rounding error.

[Türkçe source-example reasoning](#)

Worked example

ME-08-W1 Two policies, different channels

Let $Y = C + I_0 + G_0$, $C = \alpha + \beta(Y - T)$, and $T = \gamma + \delta Y$, with $\alpha = 80$, $\beta = 0.75$, $\gamma = 20$, $\delta = 0.20$, $I_0 = 60$ and $G_0 = 40$. Find Y^* , C^* and T^* . Compare two separate policies: (A) G_0 rises by 20; (B) γ rises by 8. For each policy, report exact changes in Y, C, T and explain the economic mechanism in English.

[Türkçe question](#) | [Interpretation answer after trying](#)

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

$$D = 1 - 0.75 \cdot 0.8 = 0.4; N = 80 + 60 + 40 - 0.75 \cdot 20 = 165$$

Compute the common denominator and income numerator.

$$Y^* = 165/0.4 = 412.5; C^* = 412.5 - 100 = 312.5; T^* = 20 + 0.2 \cdot 412.5 = 102.5$$

Find all three equilibrium levels.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$$\text{Policy A: } \Delta Y = 20/0.4 = 50; \Delta C = [0.75 \cdot 0.8/0.4] \cdot 20 = 30; \Delta T = (0.2/0.4) \cdot 20 = 10$$

An extra 20 units of government spending creates 50 units of equilibrium income.

$$\text{Policy B: } \Delta Y = (-0.75/0.4) \cdot 8 = -15; \Delta C = -15; \Delta T = [(1 - 0.75)/0.4] \cdot 8 = 5$$

Higher lump-sum taxes contract income and consumption but increase tax revenue.

Interpret before reading the model answer

Write a short exam answer comparing the channels, signs and units of the two policies. Explain why the tax-revenue change in policy B differs from the direct lump-sum-tax increase.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

ME-08-S1 Interpretation and verification

Why is ΔY greater than the initial ΔG_0 , and why does tax revenue change even though the tax policy is unchanged?

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-08-S2 Diagnose the multiplier label

A student uses $\beta=0.8$ and $\delta=0.25$, computes $D=0.4$, and calls $1/D=2.5$ the lump-sum-tax multiplier. Correct the label. Find the change in income if G_0 increases by 4, and separately if γ increases by 4. Assume an economically admissible starting equilibrium.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-08-S2 Interpretation and verification

Explain in English why equal-sized spending and lump-sum-tax increases do not have equal-sized opposite income effects.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-08-S3 A tax-rate change is not a fixed multiplier shock

Return to $\alpha=60$, $\beta=0.5$, $\gamma=20$, $l_0=50$ and $G_0=20$. Raise δ from 0.20 to 0.30. Compute the exact new equilibrium Y^* , C^* , T^* and the exact change in Y . Compare it with the derivative approximation evaluated at $\delta=0.20$. Explain the difference.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-08-S3 Interpretation and verification

Write an exam answer that states the direction of the tax-rate effect, distinguishes a percentage point from a percent change, and explains why the derivative does not give the exact finite change.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

One unknown, one replaced column

Cramer kuralı yeni bir ekonomik varsayım değildir; ters matrisle aynı tek çözümü farklı bir hesaplama verir. Hangi bilinmeyeni arıyorsanız onun katsayı sütununu sabitler vektörüyle değiştirirsiniz. Satır değil sütun değiştirilir; diğer sütunların sırası ve değerleri korunur. Paydada her bilinmeyen için aynı asıl katsayı determinantı bulunur. $\det(A)=0$ ise bu bölme kuralı uygulanamaz.

$$x_j = \det(A_j) / \det(A), \det(A) \neq 0$$

[Back to English](#)

Three simultaneous economic equations

Milli gelirin tamamı hanenin harcanabilir geliri değildir; vergi T çıkarıldıktan sonra $Y-T$ kalır. $T=\gamma+\delta Y$ iki parçalı vergi kuralıdır: γ gelirden bağımsız sabit vergi, δY ise gelire bağlı vergidir. Vergi tüketimi etkiler, tüketim geliri etkiler, gelir de vergiyi etkiler; dolayısıyla Y, C, T birlikte belirlenir.

$$Y = C + I_0 + G_0; C = \alpha + \beta(Y - T); T = \gamma + \delta Y$$

[Back to English](#)

Which objects are given?

“Verilmiş” olmak sonsuza kadar değişmeyecek demek değildir. Tek bir dengeyi çözerken $\alpha, I_0, G_0, \gamma, \beta, \delta$ sayıları sabittir; karşılaştırmalı statikte bunlardan birini değiştirip yeni dengeyi karşılaştırırız. İçsel Y, C, T ise her deneyde yeniden çözülür. Kaynakta α bazen dışsal değişken, bazen otonom tüketim parametresi olarak adlandırılır; önemli olan çözülen bilinmeyenlerden biri olmamasıdır.

Endogenous: Y, C, T . Given: $\alpha, I_0, G_0, \gamma, \beta, \delta$.

[Back to English](#)

Assumptions and economic admissibility

β ve δ oranları boyutsuzdur; diğer büyüklükler ortak parasal birim ve dönemdedir. $D > 0$ tek çözüm koşulunu sağlar ama tek başına $Y > 0$ demek değildir: payın da pozitif olması gerekir. Pozitif harcanabilir gelir yorumu için $Y - T = (1 - \delta)Y - \gamma > 0$ kontrol edilir. Notlardaki ekonomik yorumları bu alan koşullarıyla okuruz; matematiksel olarak bulunan her sayı otomatik olarak ekonomik açıdan uygun değildir.

$$D=1-\beta(1-\delta)>0; N=\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma; Y^*=N/D$$

[Back to English](#)

What comparative statics actually asks

$\partial Y^*/\partial G_0$, G_0 bir birim değişirken diğer verilenlerin sabit tutulduğu denge etkisidir. $\partial Y^*/\partial \delta$ ise gelir vergisi oranına duyarlılıktır. Yıldız denge değerini gösterir; türevde hangi değişkene göre işlem yapıldığı mutlaka yazılmalıdır. Ceteris paribus ifadesi “diğer her şey aynıyken” anlamına gelir; aksi halde birden fazla değişimin etkisi karışır.

Change the cause → recompute equilibrium → interpret the sign and units

[Back to English](#)

Why does taxation reduce the spending multiplier?

Bir birimlik gelir artışının δ kadarı vergiye gider. Kalan $1-\delta$ harcanabilir gelirin β kadarı tüketime dönüşür. Böylece gelirin tekrar harcamaya dönen kısmı $\beta(1-\delta)$ olur. Vergi oranı yükseldikçe bu geri dönüş küçülür ve kamu harcaması çarpanı düşer. Bu bir statik geri besleme açıklamasıdır; zaman süreci varsaymak zorunda değiliz.

Effective induced-consumption slope= $\beta(1-\delta)$; spending multiplier= $1/[1-\beta(1-\delta)]$

[Back to English](#)

Government spending is not a lump-sum tax

G_0 artışı doğrudan bir birim toplam harcamadır; γ artışı ise tüketicinin harcanabilir gelirinden bir birim alır, ama tüketim yalnızca β kadar azalır. Bu yüzden kamu harcaması çarpanı $1/D$, götürü vergi çarpanı $-\beta/D$ 'dir. p46'daki $1/D$ ifadesinin yanına “tax multiplier” yazılması bir etiket hatasıdır; türev G_0 'ya göre alındığı için bu kamu harcaması çarpanıdır.

$$\partial Y^*/\partial G_0=1/D; \partial Y^*/\partial \gamma=-\beta/D$$

[Back to English](#)

Tax revenue can rise while income falls

$T=\gamma+\delta Y$ denkleminde γ doğrudan $+1$ etkisi yapar. Aynı anda Y azalınca δY küçülür; dolaylı etki eksi olur. Toplamı $1+\delta(-\beta/D)=(1-\beta)/D$ pozitiftir. Bu ayırım, “gelir düştü, o hâlde vergi geliri kesin düşer” gibi yanlış bir yorumu önler. “Vergi oranını artırmak her ekonomide geliri artırır” gibi genel bir iddia da kurmuyoruz; sonuç bu doğrusal model ve varsayımlar içindir.

$$\partial T^*/\partial \gamma=1-\delta\beta/D=(1-\beta)/D>0$$

[Back to English](#)

Finite changes versus local derivatives

G_0 10 artarsa $\Delta Y = 10/D$ eşitliği tamdır; çünkü payda değişmez ve G_0 yalnızca payın içinde doğrusal bulunur. β veya δ değiştiğinde ise payda da değişir. Bu yüzden büyük bir vergi oranı değişiminde yalnızca eski türev $\times$ değişim yazmak yerine yeni dengeyi doğrudan hesaplamak gerekir. Vergi oranında bir yüzde puanlık artış $\Delta\delta = 0.01$ 'dir; $\Delta\delta = 1$ değildir.

Exact when D fixed: $\Delta Y = \Delta G_0/D$. Local when δ varies: $\Delta Y \approx (\partial Y^*/\partial \delta)\Delta\delta$

[Back to English](#)

ME-08-C1 Question support

Bilinmeyen sırası Y,C,T ise C için hangi sütun değiştirilir?

[Return to foundations](#)

ME-08-C2 Question support

G_0 'daki artışın Y^* üzerindeki etkisini soruyoruz.

[Return to foundations](#)

ME-08-C3 Question support

Gelir vergisi oranı artışı, diğer verilenler sabitken denge gelirini nasıl etkiler?

[Return to foundations](#)

ME-08-C4 Question support

Çarpanı bir sonuç cümlesi olarak yorumla.

[Return to foundations](#)

Put the taxed-income model into matrix form - pp43-44

Üç denklem üç bilinmeyen için ortak bir katsayı sistemi kuruyoruz; tüketim denklemindeki parantezi dikkatle açıyoruz.

Source PDF pages 43-44

$$Y = C + I_0 + G_0 \rightarrow Y - C = I_0 + G_0$$

Y 'nin katsayısı 1, C 'nin katsayısı -1 , T 'nin katsayısı 0 olur. Denklemden görünmeyen bilinmeyen katsayısı sıfırdır.

$$C = \alpha + \beta(Y - T) = \alpha + \beta Y - \beta T \rightarrow -\beta Y + C + \beta T = \alpha$$

$\beta(Y - T)$ açılınca $\beta Y - \beta T$ elde edilir. βY sola eksi, $-\beta T$ sola artı geçer. C 'nin kendi katsayısı $+1$ 'dir.

$$T = \gamma + \delta Y \rightarrow -\delta Y + 0C + T = \gamma$$

T'nin vergi denklemindeki işareti +1'dir. Kaynaktaki bir el yazısı satırında eksi gibi duran işaret matrise ve sonraki işlemlere aykırıdır; model $T = \gamma + \delta Y$ şeklindedir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix}; A \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Son bilinmeyen T'dir; kaynak p45'teki bir ara vektörde G harfi görünmesi yazım sürçmesidir. G_0 dışsal kamu harcaması olarak sağ taraftadır.

$$D = 1 \cdot (1 \cdot 1 - \beta \cdot 0) - (-1) \cdot [(-\beta) \cdot 1 - \beta(-\delta)] + 0$$

Birinci satırdaki kofaktör işaretleri +, -, + şeklindedir. İkinci terimde katsayı -1 olduğu için dıştaki eksiyle çarpımı artı olur.

$$D = 1 + (-\beta + \beta\delta) = 1 - \beta + \beta\delta = 1 - \beta(1 - \delta) > 0$$

$0 < \beta < 1$ ve $0 < 1 - \delta < 1$ olduğu için $0 < \beta(1 - \delta) < 1$; 1'den bu sayıyı çıkarınca pozitif D kalır. Böylece tek çözüm vardır.

Kaynak okuma notu - PDF 45

Sayısal katsayı matrisi ve sonraki bütün işlemler $T = \gamma + \delta Y$ modelini kullanır. Dışsal G_0 bilinmeyen vektörüne konulmaz.

[Back to English](#)

Find Y^* , C^* and T^* by Cramer's rule - p44

Kaynak p44 bu üç determinantı verip çözümleri istemektedir; burada hiçbir pay determinantını atlamadan tamamlıyoruz.

Source PDF pages 44

$$E = I_0 + G_0; A_Y = \begin{bmatrix} E & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E, yatırım ve kamu harcamasının toplamı için kısaltmadır. Y'nin katsayı sütunu $[E, \alpha, \gamma]^T$ ile değiştirilir.

$$\det(A_Y) = E(1 - 0) - (-1)(\alpha - \beta\gamma) = E + \alpha - \beta\gamma = N$$

İkinci minör $\alpha \cdot 1 - \beta\gamma$ 'dir. Önündeki $-(-1)$ bu minörü artı yapar. Böylece Y'nin payında götürü vergi $-\beta\gamma$ olarak kalır.

$$Y^* = (\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0)/D$$

D sabittir ve pozitiftir. $Y^* > 0$ için payın pozitif olması ayrıca kontrol edilir.

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & E & 0 \\ -\beta & \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma & 1 \end{bmatrix}; \det(A_c) = (\alpha - \beta\gamma) - E(-\beta + \beta\delta)$$

Birinci minör $\alpha - \beta\gamma$; ikinci minör $-\beta + \beta\delta$ olur. İkinci sütun teriminin kofaktör işareti eksi olduğundan E ile çarpım çıkarılır.

$$C^* = [\alpha - \beta\gamma + \beta(1 - \delta)(I_0 + G_0)]/D = Y^* - I_0 - G_0$$

Tüketicinin gelirden yatırım ve kamu harcaması çıkarılarak da elde edilmesi gerekir.

$Y^* - E = [N - ED]/D$ ifadesini açarsak aynı paya ulaşırız.

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & E \\ -\beta & 1 & \alpha \\ -\delta & 0 & \gamma \end{bmatrix}; \det(A_t) = \gamma - (-1)(-\beta\gamma + \alpha\delta) + E\delta$$

Üçüncü minör $(-\beta) \cdot 0 - 1 \cdot (-\delta) = \delta$ 'dir; işareti pozitiftir. Ortadaki minör $-\beta\gamma + \alpha\delta$ olur.

$$T^* = [(1 - \beta)\gamma + \delta(\alpha + I_0 + G_0)]/D = \gamma + \delta Y^*$$

$\gamma - \beta\gamma = (1 - \beta)\gamma$. Diğer terimler $\delta\alpha + \delta E$ 'dir. $\gamma + \delta N/D$ yazıp ortak paydaya getirince de aynı sonuç çıkar.

$$Y^* - T^* = (1 - \delta)Y^* - \gamma; C^* = \alpha + \beta(Y^* - T^*)$$

Tüketim yalnızca Y 'ye değil vergi sonrası gelire bağlıdır. Hesaplanan Y^*, C^*, T^* değerlerini üç orijinal denklemde sınamak, tek bir formül hatasını ortaya çıkarabilir.

[Back to English](#)

Government spending and lump-sum-tax effects - pp44,46

G_0 artışı veya azalışı yalnızca Y 'yi değil, tüketimi ve vergi tahsilatını da değiştirir. Üçünü birlikte hesaplıyoruz.

Source PDF pages 44,46

$$Y^* = N/D; \partial N/\partial G_0 = 1; \partial D/\partial G_0 = 0$$

β ve δ sabit tutulduğu için payda G_0 'ya bağlı değildir. Ceteris paribus koşulunu bu noktada kullanıyoruz.

$$\partial Y^*/\partial G_0 = [1 \cdot D - N \cdot 0]/D^2 = D/D^2 = 1/D > 0$$

Kaynak bölüm kuralını bu şekilde yazar. Sonuç bir birim kamu harcaması artışının kaç birim denge geliri yarattığını gösterir; yüzdelik bir büyüme oranı değildir.

$$C^* = Y^* - I_0 - G_0 \rightarrow \partial C^*/\partial G_0 = 1/D - 1 = (1 - D)/D = \beta(1 - \delta)/D > 0$$

Gelir artışının bir kısmı zaten G_0 'daki bir birimlik artıştır. Kalanı tüketim artışıdır. Tüketim çarpanının gelir çarpanından küçük olması bu muhasebeyle tutarlıdır.

$$T^* = \gamma + \delta Y^* \rightarrow \partial T^*/\partial G_0 = \delta/D > 0$$

γ ve δ sabit olduğundan vergi tahsilatındaki değişim yalnızca $\delta \cdot dY$ kanalıyla gelir. Vergi gelirini sabit sanmak yanlış olur; sabit olan vergi kuralıdır.

$$\text{At } D=0.49: \partial Y^*/\partial G_0 = 100/49 \approx 2.0408; \partial C^*/\partial G_0 = 51/49 \approx 1.0408; \\ \partial T^*/\partial G_0 = 15/49 \approx 0.3061$$

G_0 bir birim artarsa Y yaklaşık 2.04, C yaklaşık 1.04, T yaklaşık 0.306 birim artar. G_0 bir birim azalırsa işaretler tersine döner; katsayılar aynı kalır.

$$\partial Y^*/\partial \gamma = -\beta/D; \partial C^*/\partial \gamma = -\beta/D; \partial T^*/\partial \gamma = 1 - \delta\beta/D = (1 - \beta)/D$$

γ artınca N 'nin türevi $-\beta$ 'dir. I_0, G_0 sabitken $C = Y - I_0 - G_0$ olduğundan C 'nin tepkisi Y ile aynıdır. T 'de doğrudan $+1$ ile gelirin azalmasından kaynaklanan dolaylı etki birleştirilir.

$$\text{With fixed } \beta, \delta: \Delta Y^* = \Delta G_0/D \text{ and } \Delta Y^* = -\beta \Delta \gamma/D$$

Payda sabitken bu değişkenler gelir formülünde doğrusal yer alır. Birden fazla şok varsa etkiler toplanabilir; fakat neyin değiştiği açıkça söylenmelidir.

Kaynak okuma notu - PDF 46

Vergi paydada yer alıyor diye her türev vergi çarpanı olmaz. Değiştirilen büyüklük G_0 olduğundan bu kamu harcaması çarpanıdır.

[Back to English](#)

The income-tax-rate derivative - p46

Vergi oranı değişince payda değişir; burada yalnızca payı türevlemek yeterli değildir.

Source PDF pages 46

$$N = \alpha + I_0 + G_0 - \beta\gamma; \partial N/\partial \delta = 0; D = 1 - \beta + \beta\delta; \partial D/\partial \delta = \beta$$

γ götürü vergidir ve δ ile birlikte otomatik değişmez. Bu deneyde $\beta, \gamma, \alpha, I_0, G_0$ sabit tutulur.

$$\partial Y^*/\partial \delta = (0 \cdot D - N\beta)/D^2 = -\beta N/D^2$$

Paydanın artışı sonucu küçültür; bölüm kuralındaki eksi işaret bu ekonomik mekanizmayı yansıtır.

$$\partial Y^*/\partial \delta = -(\beta/D)(N/D) = -\beta Y^*/D < 0 \text{ when } Y^* > 0$$

Kaynakta yapılan sadeleştirme budur. Negatiflik için $\beta > 0$, $D > 0$ ve $Y^* > 0$ koşulları birlikte kullanılır; pozitif gelir koşulunu gizlememek gerekir.

$$\partial C^*/\partial \delta = \partial Y^*/\partial \delta = -\beta Y^*/D$$

$C = Y - I_0 - G_0$ kimliğini kullanıyoruz. Vergi oranı artınca bu modelde hem gelir hem tüketim azalır.

$$\partial T^*/\partial \delta = Y^* + \delta(\partial Y^*/\partial \delta) = Y^*(1 - \delta\beta/D) = (1 - \beta)Y^*/D > 0$$

Doğrudan vergi oranı artışı $+Y$ etkisi; daralan gelirin etkisi $\delta \cdot dY/d\delta$ ile eksidir. Toplam bu modelin varsayımlarında pozitif kalır. Bu sonuç evrensel vergi teorisi iddiası değil, verilen doğrusal yapının sonucudur.

[Back to English](#)

All 18 comparative-static derivatives - the p46 exercise completed

Kaynak “18 comparative-static derivatives” diyerek Y^*, C^*, T^* için $\alpha, I_0, G_0, \gamma, \beta, \delta$ değişimlerinin tamamını işaret eder. Aşağıda her grup ve işaret koşulu açıkça verilir.

Source PDF pages 46

$$\alpha: \partial Y^*/\partial \alpha = 1/D; \partial C^*/\partial \alpha = 1/D; \partial T^*/\partial \alpha = \delta/D$$

α , N 'ye $+1$ katsayısıyla girer. I_0, G_0 sabitken tüketim gelirin tamamı kadar değişir; vergi geliri δ katı kadar artar. Üç türev de pozitiftir.

$$I_0: \partial Y^*/\partial I_0 = 1/D; \partial C^*/\partial I_0 = \beta(1 - \delta)/D; \partial T^*/\partial I_0 = \delta/D$$

$C = Y - I_0 - G_0$ ifadesinde I_0 doğrudan da çıkarıldığı için tüketim türevi $1/D - 1$ olur. Bu, gelirin tümünün tüketim olmadığı anlamına gelir.

$$G_0: \partial Y^*/\partial G_0 = 1/D; \partial C^*/\partial G_0 = \beta(1 - \delta)/D; \partial T^*/\partial G_0 = \delta/D$$

Gelir çarpanı, tüketim çarpanı ve vergi geliri çarpanı farklı büyüklükleri ölçer. Hepsini tek bir “çarpan” adı altında karıştırmayın.

$$\gamma: \partial Y^*/\partial \gamma = -\beta/D; \partial C^*/\partial \gamma = -\beta/D; \partial T^*/\partial \gamma = (1-\beta)/D$$

İlk iki işaret negatiftir; sonuncusu $1-\beta > 0$ olduğu için pozitifdir. Vergi tahsilatının artışının birden küçük olması gelirdeki daralma nedeniyle kısmi geri kaybı gösterir.

$$\partial Y^*/\partial \beta = [(-\gamma)D - N(-1+\delta)]/D^2 = [(1-\delta)N - \gamma D]/D^2 = Z/D$$

β hem $-\beta\gamma$ teriminde hem D 'de bulunduğu için iki etkiyi birlikte alırız. Payı D 'ye bölerek $(1-\delta)Y^* - \gamma = Z$ harcanabilir gelirini tanırız.

$$\beta: \partial Y^*/\partial \beta = Z/D; \partial C^*/\partial \beta = Z/D; \partial T^*/\partial \beta = \delta Z/D$$

β artışı ancak harcanabilir gelir pozitifken tüketim ve gelir artırıcı olarak yorumlanır. β 'nın artmasını yüzde puan cinsinden verirse gerçek sayısal değişim örneğin 0.01 olmalıdır. Sonlu büyük değişimde yeni denge hesaplanır.

$$\delta: \partial Y^*/\partial \delta = -\beta Y^*/D; \partial C^*/\partial \delta = -\beta Y^*/D; \partial T^*/\partial \delta = (1-\beta)Y^*/D$$

Bu üçlü oran vergisinin tüm denge sonuçlarını özetler. 6 grup $\times$ 3 çıktı = 18 türev tamamlandı. İşaretler söylenirken $Y^* > 0$ ve gerektiğinde $Z > 0$ gibi ekonomik alan koşulları eklenmelidir.

[Back to English](#)

Bridge to the market-model review - bottom of p46

Bir sonraki sayfadaki uygulamanın başlangıcını burada kayda geçiriyoruz; türevlerin tamamı ME-09'da çözülür.

Source PDF pages 46 (bottom)

$$Q^D = a - bP; Q^S = -c + dP; Q^D = Q^S$$

$a, b, c, d > 0$ varsayılır. Kaynak p46'daki Q^* paydasının kısa yazımı tamamlanmamış görünür; p47'de açıkça $b+d$ olarak verilir.

$$a - bP = -c + dP \rightarrow a + c = (b + d)P \rightarrow P^* = (a + c)/(b + d)$$

Talep ve arz eşitliğindeki eksi işaretler taşınırken $a+c$ ve $b+d$ oluşur.

$$Q^* = a - b(a + c)/(b + d) = [a(b + d) - b(a + c)]/(b + d) = (ad - bc)/(b + d)$$

$Q^* > 0$ için $ad > bc$ gerekir; a, b, c, d pozitifliği tek başına pozitif miktarı garanti etmez. Sekiz piyasa türevi ve grafikli işaret yorumları ME-09'da ele alınır.

[Back to English](#)

Cramer's rule for the two-country model - p43

ME-07'de elde edilen indirgenmiş biçimin Cramer kuralıyla aynı çıkmasını kontrol ediyoruz.

Source PDF pages 43

$$K = \begin{bmatrix} a & -m_2 \\ -m_1 & b \end{bmatrix}; \quad a = 1 - c_1 + m_1; \quad b = 1 - c_2 + m_2; \quad D = ab - m_1 m_2 > 0$$

Bu bölümde a,b yalnızca köşegen katsayıların kısaltmasıdır; tüketim veya talep parametreleriyle karıştırılmamalıdır. Sağ taraf $[A_1, A_2]^T$ 'dir.

$$K_1 = \begin{bmatrix} A_1 & -m_2 \\ A_2 & b \end{bmatrix}; \quad \det(K_1) = A_1 b - (-m_2) A_2 = b A_1 + m_2 A_2$$

İkinci sütun değişmez. Eksi ile eksi çarpımı çıkarılırken artıya dönüşür. Kaynakta bir ara Y_1 satırında c_1 görünüyor; doğru $b = 1 - c_2 + m_2$ değeridir, çünkü değiştirmedığımız sağ alt eleman budur.

$$Y_1^* = [(1 - c_2 + m_2) A_1 + m_2 A_2] / D$$

Paydadaki K, sütunu değiştirilmiş K_1 değildir. Orijinal sistemin ortak determinantı kullanılmalıdır.

$$K_2 = \begin{bmatrix} a & A_1 \\ -m_1 & A_2 \end{bmatrix}; \quad \det(K_2) = a A_2 - A_1 (-m_1) = a A_2 + m_1 A_1$$

Birinci sütun aynen kalır. A_1 ve A_2 'yi bir satıra değil, sabitler vektörü olarak ikinci sütuna yerleştiririz.

$$Y_2^* = [(1 - c_1 + m_1) A_2 + m_1 A_1] / D$$

Aynı ekonomik denklemler aynı tek çözümü vermelidir. Bu eşitlik hesaplama yöntemleri arasında güçlü bir doğrulama sağlar.

Kaynak okuma notu - PDF 43

Birinci sütun değiştirilince sağ alt katsayı değişmez; bu katsayı ikinci ülkeye ait $1 - c_2 + m_2$ 'dir.

[Back to English](#)

The exact numerical source example - p45

Notlardaki sayıları aynen kullanıyoruz; yalnızca erken yuvarlama yerine son adımda yuvarlıyoruz.

Source PDF pages 45

$$E=500+250=750; D=1-0.6(1-0.15)=1-0.51=0.49$$

$1-0.15=0.85$; $0.6 \cdot 0.85=0.51$. Bu nedenle bütün Cramer payları 0.49'a bölünür.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.6 \\ -0.15 & 0 & 1 \end{bmatrix}; d = \begin{bmatrix} 750 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Vergi oranı 0.15 olduğundan üçüncü satırın ilk elemanı -0.15 'tir. Sabit vergi 50 sağ taraftadır; ikisini karıştırmayın.

$$\det(A_v) = 750 + 200 - 0.6 \cdot 50 = 950 - 30 = 920; Y^* = 920 / 0.49 = 92000 / 49 \approx 1877.5510$$

Kaynaktaki yaklaşık 1877.5 sonucu erken yuvarlanmıştır. Tam kesir $92000/49$ 'dur; sonraki hesaplarda bunu korumak daha doğrudur.

$$\det(A_c) = (200 - 30) - 750(-0.6 + 0.09) = 170 + 382.5 = 552.5$$

$0.6 \cdot 0.15 = 0.09$; $-0.6 + 0.09 = -0.51$. $-750 \cdot (-0.51) = +382.5$ olur. Hem negatif işaret önemlidir.

$$C^* = 552.5 / 0.49 = 55250 / 49 \approx 1127.5510$$

Ayrıca $Y^* - 750 = 1127.5510$ kontrolü yapılır. Kaynağın 1127.5 değeri yuvarlama düzeyindedir.

$$\det(A_t) = -30 + 30 + 50 + 112.5 = 162.5; T^* = 162.5 / 0.49 = 16250 / 49 \approx 331.6327$$

$(1 - 0.6) \cdot 50 + 0.15 \cdot (200 + 750) = 20 + 142.5 = 162.5$ alternatif kısa kontroldür. $T^* \approx 331.6327$ sonucunu mutlaka $\gamma + \delta Y^*$ ile de doğrularız.

$$Y^* - T^* = 75750 / 49 \approx 1545.9184; 200 + 0.6(75750 / 49) = 55250 / 49$$

Vergi sonrası gelir pozitif olduğundan tüketim ilişkisinin ekonomik yorumu uygundur. 200 otonom tüketimdir; gelir sıfır olsa bile modelde bu terim bulunur.

$$Y^* = C^* + 500 + 250; T^* = 50 + 0.15Y^*$$

Gelir ve tüketim farkı tam 750'dir. Yaklaşık sonuçlarda küçük farklar yuvarlamadan gelebilir; kesirli kontrolde fark sıfırdır.

Kaynak okuma notu - PDF 45

Yuvarlama öğretici içeriği değiştirmez; ancak kontrol ve sonraki hesaplar için tam kesirleri koruyoruz.

[Back to English](#)

ME-08-W1 Worked example support

İki politika ayrı deneylerdir: B politikasını A'nın üzerine ekleme. Önce temel dengeyi bul, sonra kamu harcaması ve götürü vergi kanallarını ayır.

$$D = 1 - 0.75 \cdot 0.8 = 0.4; N = 80 + 60 + 40 - 0.75 \cdot 20 = 165$$

Vergi sonrası tüketim eğimi $0.75 \cdot 0.8 = 0.6$ 'dır; bu nedenle $D = 0.4$. Otonom talep toplamından götürü verginin tüketim etkisi 15 çıkarılır.

$$Y^* = 165 / 0.4 = 412.5; C^* = 412.5 - 100 = 312.5; T^* = 20 + 0.2 \cdot 412.5 = 102.5$$

Harcanabilir gelir $412.5 - 102.5 = 310$ 'dur. $80 + 0.75 \cdot 310 = 312.5$ tüketim kontrolünü verir.

$$\text{Policy A: } \Delta Y = 20 / 0.4 = 50; \Delta C = [0.75 \cdot 0.8 / 0.4] \cdot 20 = 30; \Delta T = (0.2 / 0.4) \cdot 20 = 10$$

Yeni $Y = 462.5$, $C = 342.5$, $T = 112.5$ olur. Yeni gelir kimliği $342.5 + 60 + 60 = 462.5$ 'tir. İlk doğrudan 20 harcamaya, 30 tüketim artışı eklenir.

$$\text{Policy B: } \Delta Y = (-0.75 / 0.4) \cdot 8 = -15; \Delta C = -15; \Delta T = [(1 - 0.75) / 0.4] \cdot 8 = 5$$

Yeni $Y = 397.5$, $C = 297.5$, $T = 107.5$ olur. γ artık 28'dir; $28 + 0.2 \cdot 397.5 = 107.5$ kontrolünü verir. Doğrudan vergi artışı 8 iken düşen gelir 3 birim oransal vergi kaybı yaratır; net artış 5'tir.

İki politikanın gelir, tüketim ve vergi gelirine neden farklı etkiler yaptığını İngilizce açıkla. B'de doğrudan +8 ile dolaylı -3 etkisini ayır.

[Return to the worked example](#)

ME-08-S1 Question support

Üç seviyeyi birlikte bulduktan sonra vergi kuralını sabit tutarak kamu harcaması şokunu uygula.

Gelir artışı neden ilk kamu harcaması artışından büyük? Vergi politikası değişmemişken toplam vergi neden artıyor?

[Return to the problem](#)

ME-08-S2 Question support

Aynı 4 birimlik değişim iki farklı dışsal büyüklükte uygulanıyor. İşaret ve ilk turdaki tüketim etkisini birlikte açıklayın.

Aynı büyüklükte kamu harcaması ve götürü vergi artışının neden eşit büyüklükte zıt gelir etkileri olmadığını açıkla.

[Return to the problem](#)

ME-08-S3 Question support

Vergi oranı 10 yüzde puan, yani 0.10 artıyor. Payda değiştiği için sonlu değişimi yeni dengeyi hesaplayarak bul.

Oran artışının yönünü, yüzde puan farkını ve türev yaklaşımının neden tam olmadığını İngilizce bir sınav yanıtında birleştir.

[Return to the problem](#)

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-08-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

[Return and try](#) | [If still stuck, hint 2](#)

ME-08-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

[Return and try](#) | [If still stuck, hint 2](#)

ME-08-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

[Return and try](#) | [If still stuck, hint 2](#)

Hints Level 2 One useful next move

ME-08-S1

$D=1-0.5(0.8)=0.6$. Keep the tax rule, not total tax revenue, fixed.

G_0 değişince γ ve δ sabit kalır; T içsel olduğu için değişir.

[Return and complete your attempt](#)

ME-08-S2

G_0 has coefficient $+1$ in N ; γ has coefficient $-\beta$.

Çarpanı isimden ezberlemek yerine Y^* payındaki değişkenin katsayısını okuyun.

[Return and complete your attempt](#)

ME-08-S3

The numerator stays 120, but the new D is 0.65. At the old equilibrium $\partial Y^*/\partial \delta = -0.5 \times 200/0.6$.

$\Delta \delta = 0.10$ kullan; 10 yazma. Yaklaşık ve tam cevabı aynı isim altında sunma.

[Return and complete your attempt](#)

Solutions and model interpretations

ME-08-W1 Model interpretation

Holding all other primitives fixed, a 20-unit increase in G_0 raises equilibrium income by 50, consumption by 30 and tax revenue by 10 monetary units. It enters aggregate demand directly and induces further consumption. Separately, an 8-unit rise in lump-sum taxes reduces disposable income and lowers income and consumption by 15 each. Tax revenue rises by only 5 because the direct 8-unit increase is partly offset by a 3-unit loss of proportional tax revenue as income falls. These are comparisons of equilibria, not predictions of adjustment time.

G_0 artışı doğrudan talep enjeksiyonu olduğu için işareti pozitiftir. γ artışı önce harcanabilir geliri azaltır, tüketim daralması geliri düşürür. T 'nin tepkisi sadece γ kadar değildir; gelir de değiştiği için δY parçası yeniden hesaplanır. İngilizce yanıtta “holding all other primitives fixed” ifadesi deneyin sınırını, “monetary units” ifadesi birimi ve “equilibrium” ifadesi sonucun statik niteliğini belirtir.

Check the explanation

- ☐ Names G_0 and γ as separate exogenous changes with other primitives fixed.
- ☐ Reports ΔY , ΔC , ΔT in monetary units, not percentages.
- ☐ Explains direct spending injection versus disposable-income contraction.
- ☐ Explains $\Delta T = 8 + 0.2(-15) = 5$ in policy B.

ME-08-S1 Solution

$$D = 0.6; N = 60 + 50 + 20 - 0.5 \cdot 20 = 120; Y^* = 120 / 0.6 = 200$$

Find income first.

Payda pozitif; pay da pozitif olduğu için gelir ekonomik olarak pozitiftir.

$$C^* = 200 - 50 - 20 = 130; T^* = 20 + 0.2 \cdot 200 = 60; Y^* - T^* = 140$$

Recover consumption, taxes and disposable income.

$$60 + 0.5 \cdot 140 = 130 \text{ tüketim denklemini doğrular.}$$

$$\Delta Y = 12 / 0.6 = 20; \Delta C = 20 - 12 = 8; \Delta T = 0.2 \cdot 20 = 4$$

Compute exact finite changes because β and δ are unchanged.

Yeni gelir 220, tüketim 138, vergi 64 olur. $138 + 50 + 32 = 220$ ve $20 + 0.2 \cdot 220 = 64$ kontrolleri sağlanır.

Model English interpretation

The 12-unit spending injection induces 8 additional units of consumption, so equilibrium income rises by 20 monetary units, *ceteris paribus*. The tax rule is unchanged, but tax revenue is endogenous: the extra income generates $\delta\Delta Y = 0.2 \times 20 = 4$ units of additional taxes.

Türkçe reasoning

“Vergi sabit” yerine “vergi kuralı sabit” denmelidir. G_0 ’nun doğrudan 12 birim etkisine, artan vergi sonrası gelirin yarısının tüketime dönmesiyle 8 birim ek tüketim gelir. Vergi oranı değişmese bile vergi matrahı Y yükseldiği için T artar.

Check your explanation

- ☐ Separates the initial government-spending injection from induced consumption.
- ☐ Distinguishes fixed γ, δ from endogenous T .
- ☐ Reports computed changes with monetary units and *ceteris paribus*.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

[Retry from the blank problem](#)

ME-08-S2 Solution

$$D = 1 - 0.8 \cdot 0.75 = 0.4; \partial Y^* / \partial G_0 = 1/0.4 = 2.5$$

The reported number is the government-expenditure multiplier.

Kamu harcaması toplam talebe doğrudan +1 olarak girdiğinden payın türevi 1’dir.

$$\partial Y^* / \partial \gamma = -0.8/0.4 = -2$$

Lump-sum taxation first lowers consumption by β per tax unit.

Götürü vergi çarpanı hem eksi işaretli hem harcama çarpanından mutlak değerce küçüktür.

$$\Delta G_0 = 4 \rightarrow \Delta Y = 2.5 \cdot 4 = 10; \Delta \gamma = 4 \rightarrow \Delta Y = -2 \cdot 4 = -8$$

Treat the two changes as separate experiments.

İki şoku birlikte uyguluyoruz. Diğer verilenler sabitken her biri kendi katsayısıyla çarpılır.

Model English interpretation

Government spending enters demand directly, whereas a lump-sum-tax increase reduces disposable income and initially lowers consumption by only $\beta=0.8$ per tax unit. Therefore the spending multiplier is 2.5 but the tax multiplier is -2 . A separate 4-unit increase in spending raises income by 10; a 4-unit tax increase lowers income by 8, holding the remaining primitives fixed.

Türkçe reasoning

Gelirin vergiyle azaltılan her birimi tamamen tüketilmeyecekti; $\beta=0.8$ kadarı tüketilecekti. Bu nedenle vergi artışının ilk talep daraltıcı etkisi, aynı tutardaki doğrudan kamu harcaması etkisinden küçük olur. Negatif işareti unutmak ekonomik mekanizmayı ters çevirir.

Check your explanation

- ☐ Identifies which derivative is the government-expenditure multiplier.
- ☐ Explains why a tax unit reduces initial consumption by β rather than one.
- ☐ Reports the two computed income changes as separate monetary-unit experiments.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

[Retry from the blank problem](#)

ME-08-S3 Solution

$$D_{\text{new}} = 1 - 0.5(1 - 0.30) = 0.65; Y_{\text{new}} = 120/0.65 = 2400/13 \approx 184.6154$$

Recompute the denominator after the tax-rate change.

$\alpha, I_0, G_0, \beta, \gamma$ sabit olduğundan $N=120$ kalır; yalnızca δ paydada değişir.

$$C_{\text{new}} = 2400/13 - 70 = 1490/13; T_{\text{new}} = 20 + 0.30 \cdot 2400/13 = 980/13$$

Recover the other equilibrium outcomes.

$T \approx 75.3846$ artarken Y ve C azalır. Yeni harcanabilir gelir $(2400 - 980)/13 = 1420/13$ 'tür; $60 + 0.5 \cdot 1420/13 = 1490/13$ kontrolünü sağlar.

$$\text{Exact } \Delta Y = 2400/13 - 200 = -200/13 \approx -15.3846$$

Compare the two equilibrium levels.

Bu sonuç yeni dengeyi doğrudan çözmenin tam sonucudur; türev yaklaşımı değildir.

$$(\partial Y^*/\partial \delta)_{\text{old}} = -0.5 \cdot 200/0.6 = -500/3; \Delta Y \approx (-500/3) \cdot 0.10 = -50/3 \approx -16.6667$$

Use the old derivative for a local approximation.

Türev $\delta=0.20$ noktasındaki eğimdir; 0.10 büyüklüğündeki sonlu değişim boyunca eğim sabit kalmaz. Bu yüzden yaklaşık düşüş tam düşüşten biraz büyüktür.

Model English interpretation

A rise in δ from 0.20 to 0.30 is a 10-percentage-point increase. It reduces the fraction of additional income available for consumption, so equilibrium income falls, ceteris paribus. The exact fall is $200/13 \approx 15.3846$ monetary units. The old-equilibrium derivative predicts an approximate fall of $50/3 \approx 16.6667$; it is not exact because changing δ also changes the denominator and the slope along the equilibrium relation.

Türkçe reasoning

0.20'den 0.30'a geçiş 10 yüzde puandır; başlangıç oranına göre yüzde artış ise %50'dir, ikisi aynı kavram değildir. Çarpanın sabit olduğu G_0 deneyinden farklı olarak δ değişimi D 'yi değiştirdiği için başlangıç eğimi bütün aralık için kullanılamaz. Varsayımlar altında yön negatif kalır fakat büyüklük için tam denge hesabı gerekir.

Check your explanation

- ☐ Explains the disposable-income and induced-consumption channel.
- ☐ Distinguishes a percentage-point change from a percent change.
- ☐ Reports the computed exact change and explicitly labels the derivative estimate as an approximation.
- ☐ Notes that δ changes D and therefore the slope is not constant.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

[Retry from the blank problem](#)

Concept check answers

ME-08-C1 Answer B

C is the second unknown, so replace the second coefficient column by the full constants vector.

Sıra belirleyicidir. Y için 1., C için 2., T için 3. sütun değiştirilir; sabitler vektörü bütün üç satırıyla yerleştirilir.

If you chose differently: Read the unknown order before selecting a column.

Satır denklemi, sütun bilinmeyeni temsil eder.

ME-08-C2 Answer B

Government spending enters the income numerator with coefficient one.

$-\beta/D$ götürü verginin çarpanıdır; δ vergi oranıdır. Türevde paydanın sabit kalıp kalmadığını kontrol etmek gerekir.

If you chose differently: Identify which primitive changes and how it enters N.

G_0 , $N = \alpha + I_0 + G_0 - \beta Y$ ifadesinde +1 katsayısıyla yer alır.

ME-08-C3 Answer B

Higher proportional taxation reduces disposable-income-induced consumption and equilibrium income.

Parametre olmak etkisiz olmak demek değildir. δ artınca D artar, N sabit kalır; pozitif N/D bu nedenle küçülür. Vergi gelirinin tepkisi ayrı bir sorudur.

If you chose differently: Differentiate $D = 1 - \beta + \beta\delta$, not just the numerator.

D'nin δ 'ya göre türevi $+\beta$ 'dir; bir sabit payı artan pozitif paydaya bölersen sonuç küçülür.

ME-08-C4 Answer B

The multiplier is a level change per monetary unit, not a percentage or adjustment time.

Birimlere dikkat: $\partial Y / \partial G$, parasal gelir birimi / parasal kamu harcaması birimidir. Başlangıç gelirine bölmeden yüzde sonucu söylenemez; zaman denklemi verilmeden süre de bulunamaz.

If you chose differently: Check the units of Y and G_0 .

Türev oranı hangi iki büyüklüğün değişimini karşılaştırıyor?

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. "Alone" means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can replace the correct Cramer column and keep the original determinant as denominator.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can derive all three equilibrium outcomes and verify the original equations.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can distinguish government-spending, lump-sum-tax and tax-rate effects.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can complete and interpret all 18 comparative-static derivatives.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone

I can state conditions, units and ceteris paribus in an English exam answer.

Sonucu sadece hesaplamakla kalmıyorum: hangi dışsal değişikliğin hangi mekanizmayla etki yaptığını, işaretin hangi varsayıma bağlı olduğunu ve sonlu değişimin tam mı yaklaşık mı olduğunu açıklayabiliyorum.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Visually verified pp43-46 at high resolution. All source replacement determinants, symbol definitions, assumptions, exact numerical example, requested Y/C/T spending effects, 18-derivative exercise and bottom-of-p46 market bridge are included. Checked corrections: p43 Y_1 cofactor must use c_2 ; p45 tax rule is $T = \gamma + \delta Y$ and unknown is T , with exact fractions replacing premature rounding; p46 $1/D$ is the government-spending multiplier, not the lump-sum-tax multiplier; market Q^* denominator is $b+d$ as confirmed p47. Original W1/S1-S3 are independent of the source numbers.