Mathematical Economics I
Complete study workbook

Nine connected units • English questions • Türkçe explanations

From market equilibrium to matrices, inverses, Cramer’s rule and comparative statics.

Use the page to think

Read a short explanation, cover it, and explain the next decision aloud. Write only a reason, a missing step, a check or your own solution. Copying an entire explanation is not the task.

Each unit contains English foundations, complete derivations and source examples, a worked model, independent practice, separate Turkish support, two hint levels, and solutions with model English interpretations and Turkish reasoning.

A practical order

1. Read the foundations and predict the next algebraic step.
2. Attempt the concept checks and W1 interpretation.
3. Solve S1-S3 on the handwriting pages before opening hints.
4. Compare your explanation with the model answer, not just the number.
5. Record the first error and retry without help.

Notability and navigation

Import this PDF into Notability manually. Its writing areas are intended for Apple Pencil or another stylus. The PDF and website do not synchronize: update your progress yourself. Internal links jump to Turkish support, hints and solutions; translations do not hide and reveal inside a static PDF.

The footer links to the contents. PDF bookmarks organize the units and sections. All page numbers refer to this combined notebook.

Source scope: the supplied 50-page Mathematical Economics I notes. Readable lessons and examples are represented; unclear marks and source slips are identified rather than silently copied. The p28 unclear symmetric entry is represented consistently by t. Page 50 has no additional readable lesson.

Version 29 October 2026 • Personal study and annotation copy

Contents

Open a unit, then use its section links. The English and Turkish versions share the same formulas and exercise IDs.

ME-01 Partial Market Equilibrium 3

ME-02 National Income Equilibrium & Multiplier 35

ME-03 Two-Commodity Market Model 64

ME-04 Linear Systems & Matrix Representation 94

ME-05 Matrix Operations, Special Matrices & Transpose 126

ME-06 Linear Independence & Determinants 163

ME-07 Inverse Matrix & Economic Applications 205

ME-08 Cramer’s Rule, Taxed Income & Comparative Statics 240

ME-09 Review & Worked Practice 279

Each unit follows this route: Foundations → Derivations → Source examples → Worked example → Independent practice → Türkçe support → Hints → Solutions → Reflection.

ME-01 Partial Market Equilibrium

Source PDF pages 1-4

Explain one market, derive its equilibrium, and distinguish an algebraic intersection from feasible positive trade.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

One market and one common price

A partial-market model isolates one market while holding other influences fixed. Demand and supply describe intended quantities at the same price, not two different prices.

$Q_d = a - bP$; $Q_s = -c + dP$; $a, b, c, d > 0$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
P	Price per unit	Birim fiyat
Qd, Qs	Planned quantity demanded and supplied	Talep ve arz miktarları
a	Demand intercept	P=0 için talep
b	Demand slope magnitude; slope −b	Fiyat 1 artınca talepteki azalış
c	Magnitude of the negative supply intercept −c	Negatif arz kesişiminin pozitif büyüklüğü

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
d	Supply slope +d	Fiyat 1 artınca arzdaki artış
*	Equilibrium value, not multiplication	Denge değeri

Türkçe explanation

Variables, parameters and units

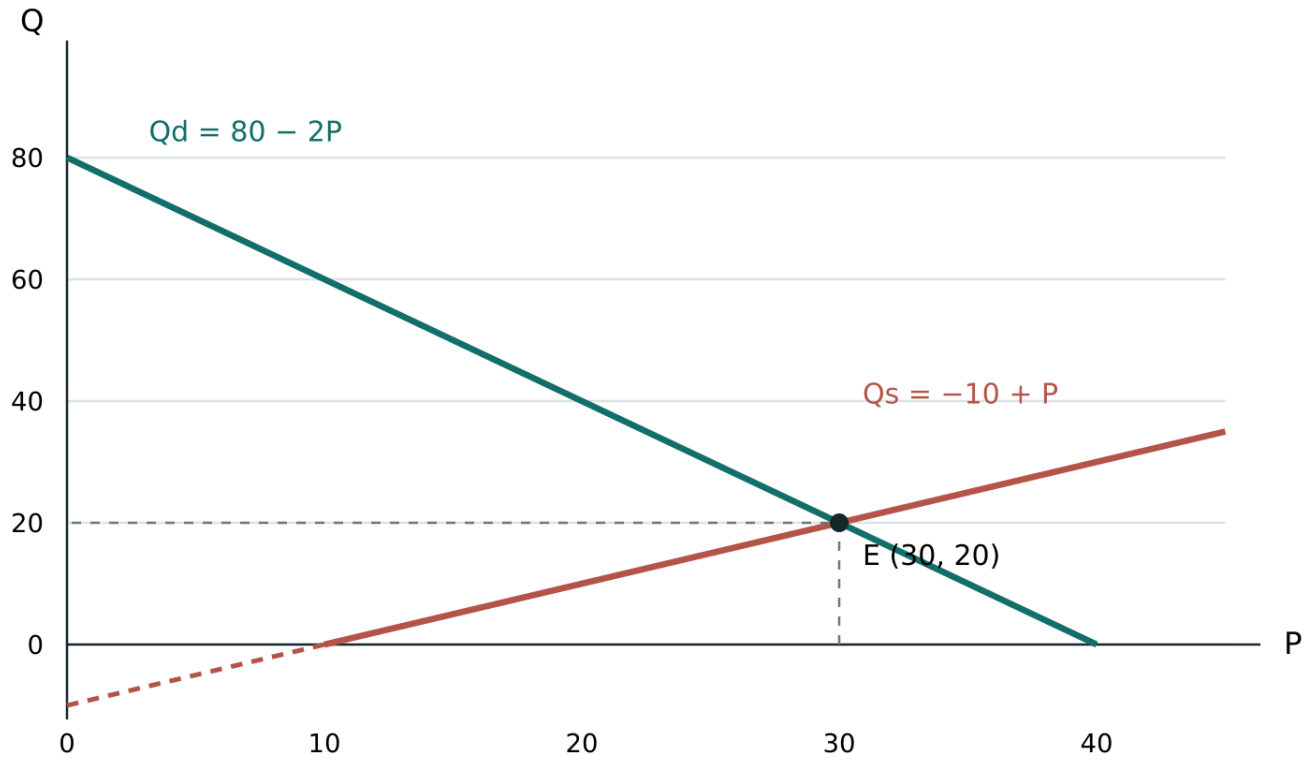
P, Qd and Qs are variables. The parameters a,b,c,d are fixed within a scenario. Both quantities must use the same units and period. A price increase of 1 changes demand by −b and supply by +d.

$$\Delta Qd = -b\Delta P;\ \Delta Qs = d\Delta P$$

Türkçe explanation

Read the axes and the gap

The source uses P horizontally and Q vertically. Slopes are −b and +d. For W1 at P=20, demand is 40 and supply is 10, so excess demand is 30. At P=35, demand is 10 and supply is 25, so excess supply is 15. Equilibrium means Qd=Qs. The price intercepts are a/b for demand and c/d for supply. The dashed negative-quantity segment is only a mathematical extension.



Türkçe explanation

A positive price is not enough

The unique price is positive under the stated assumptions, but quantity can be negative. Positive trade requires ad>bc, equivalently a/b>c/d. Equality gives zero trade. Negative quantities are mathematical extensions, not actual negative production.

$P^*=(a+c)/(b+d)$; $Q^*=(ad-bc)/(b+d)$

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-01-C1

When P rises by 1, how do Qd and Qs change?

A. Qd falls by b; Qs rises by d.

B. Qd rises by b; Qs falls by d.

C. Both stay unchanged.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-01-C2

Why is division by b+d permitted?

A. Every expression can be a divisor.

B. b+d is positive, hence nonzero.

C. Equilibrium forces b=d.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Derive the equilibrium price

Use equal quantities at one common price.

$$Q_d = Q_s$$

Start with the equilibrium condition.

$$a - bP = -c + dP$$

Substitute the two behavioral equations.

$$a - bP + bP = -c + dP + bP$$

Add bP to both sides.

$$a = -c + dP + bP$$

Cancel −bP + bP on the left.

$$a + c = -c + dP + bP + c$$

Add c to both sides.

$$a + c = dP + bP$$

Cancel −c + c on the right.

$$a + c = (d + b)P = (b + d)P$$

Factor out P; reorder the sum.

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{(b + d)P}{b + d}$$

Divide both sides by b + d.

$$P^* = \frac{a + c}{b + d}$$

The equilibrium price is now a function of parameters only.

Detailed Turkish reasoning

Derive the equilibrium quantity

Substitute the solved price and use a common denominator.

$$Q^* = a - bP^*$$

Use the demand equation at the equilibrium price.

$$Q^* = a - b\frac{a + c}{b + d}$$

Substitute the derived price.

$$Q^* = \frac{a(b + d)}{b + d} - \frac{b(a + c)}{b + d}$$

Rewrite a using the common denominator.

$$Q^* = \frac{a(b + d) - b(a + c)}{b + d}$$

Combine fractions with the same denominator.

$$Q^* = \frac{ab + ad - (ab + bc)}{b + d}$$

Distribute both products.

$$Q^* = \frac{ab + ad - ab - bc}{b + d}$$

Apply the minus sign to every term.

$$Q^* = \frac{ad - bc}{b + d}$$

Cancel $ab - ab$.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Source example - negative intersection (PDF pp.3-4)

The source uses a=1,b=10,c=10,d=1 to show why a positive price does not guarantee positive trade.

Source PDF pages 3-4

$Qd=1-10P$; $Qs=-10+P$

Insert the source parameters.

$1-10P=-10+P$

Set the two planned quantities equal.

$1-10P+10P=-10+P+10P \rightarrow 1=-10+11P$

Add 10P to both sides and simplify.

$1+10=-10+11P+10 \rightarrow 11=11P \rightarrow P^*=1$

Add 10 and divide by 11.

$Qd(1)=1-10=-9$; $Qs(1)=-10+1=-9$

Both linear schedules give the same negative amount.

$Q^*=(ad-bc)/(b+d)=(1-100)/11=-99/11=-9$

Verify the source's reduced-form calculation.

$a/b=1/10 < c/d=10$

Compare the zero-quantity price intercepts.

$P^*=1$; $Q^*=-9$

Exam-ready interpretation: The extended lines intersect at a positive price but a negative quantity, so this is not a feasible positive-trade equilibrium. Positive demand requires $P<0.1$, whereas positive supply requires $P>10$; no common price satisfies both.

Türkçe source-example reasoning

Source example - a feasible market (PDF p.4)

The source’s other example is Qd=21−3P and Qs=−4+8P. Work with exact fractions first.

Source PDF pages 4

$$21-3P=-4+8P$$

Set demand equal to supply.

$$21-3P+3P=-4+8P+3P \rightarrow 21=-4+11P$$

Add 3P to both sides.

$$21+4=-4+11P+4 \rightarrow 25=11P$$

Add 4 to both sides.

$$P^*=25/11$$

Divide by positive 11.

$$Qd=21-3(25/11)=231/11-75/11=156/11$$

Use a common denominator in demand.

$$Qs=-4+8(25/11)=-44/11+200/11=156/11$$

Check supply independently.

$$ad-bc=21\cdot 8-3\cdot 4=168-12=156>0;\ 1/2<25/11<7$$

Verify feasibility with both the numerator and price intercepts.

$$P^*=25/11;\ Q^*=156/11>0$$

Exam-ready interpretation: At the common price 25/11, buyers and sellers both plan 156/11 units of this good in the same period. The price lies between the supply and demand zero-quantity thresholds, so both planned quantities are positive.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-01-W1 Solve a linear market

Given Qd = 80 − 2P and Qs = −10 + P, derive the equilibrium price and quantity. Show the same operation on both sides, check the result in both schedules, and explain what the equilibrium means.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$$80 - 2P = -10 + P$$

Set quantity demanded equal to quantity supplied.

$$80 - 2P + 2P = -10 + P + 2P$$

Add 2P to both sides.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$$80 = -10 + 3P$$

Combine P + 2P = 3P.

$$80 + 10 = -10 + 3P + 10$$

Add 10 to both sides.

$$90 = 3P$$

Cancel −10 + 10; add 80 + 10.

$$\frac{90}{3} = \frac{3P}{3} \Rightarrow P^{*} = 30$$

Divide both sides by 3.

$$Q_d(30) = 80 - 2(30) = 80 - 60 = 20$$

Substitute the price into demand.

$Q_s(30) = -10 + 30 = 20$

Check supply independently.

$10 < 30 < 40 \quad ; \quad Q^* = 20 > 0$

Check the feasible price interval and interpret.

Interpret before reading the model answer

Why is a price of 30 not a complete economic answer?

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-01-S1 Rebuild

Given Qd = 100 - 2P and Qs = -20 + 2P, find the equilibrium price and quantity. Show each algebraic step, verify both schedules, and interpret your answer.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-01-S1 Interpretation and verification

Interpret the equilibrium and explain what both checks establish.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-01-S2 Transfer · Extension

Demand changes from Qd = 80 - 2P to Qd = 92 - 2P. Supply stays Qs = -10 + P. Find the new equilibrium and compare it with ME-01-W1. Explain the shortage at the old price and distinguish a demand shift from a movement along supply.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-01-S2 Interpretation and verification

Explain why the initial shortage at the old price differs from the final increase in equilibrium quantity.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-01-S3 Challenge The Result

Given Qd = 12 - 3P and Qs = -10 + 2P, find the algebraic intersection. Is it an economically feasible positive-trade equilibrium? Justify your answer using quantity and the two price intercepts.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-01-S3 Interpretation and verification

Explain why a valid algebraic intersection can fail to represent positive trade.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

One market and one common price

Tek bir malın piyasasına bakıyoruz. Diğer etkiler sabitken alıcının almak istediği miktar ile satıcının satmak istediği miktar hangi ortak fiyatta eşit olur? Denklem ekonomik hikâyenin kısa yazımıdır; hikâyenin yerine geçmez.

$Q_d = a - bP;\ Q_s = -c + dP;\ a,b,c,d > 0$

Back to English

Variables, parameters and units

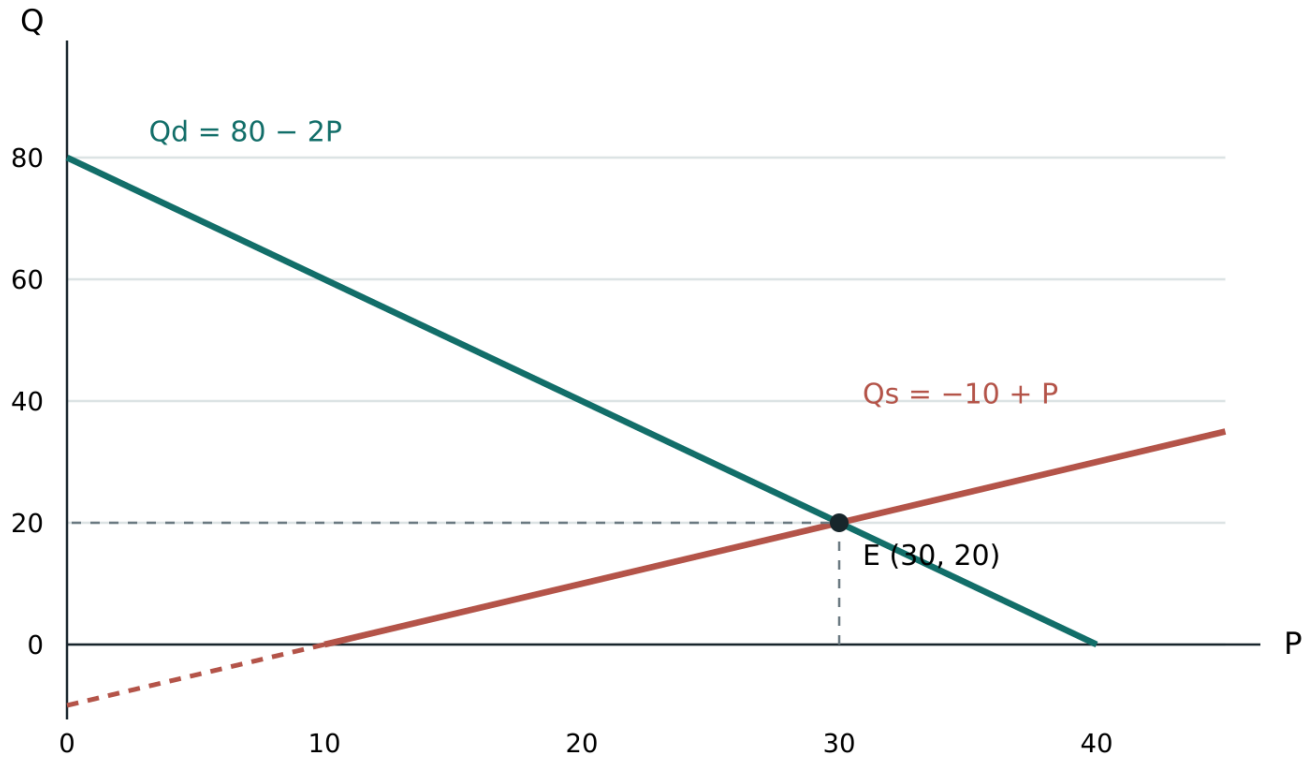
P, Qd, Qs model içinde belirlenir; a,b,c,d ise bu senaryoda verilir. Fiyatı P+1 yapınca $a - b(P+1) = a - bP - b$ olur: fark $-b$. Arzda $-c + d(P+1) = -c + dP + d$ olduğundan fark $+d$. Miktar birimleri ve dönemleri aynı olmalıdır; haftalık talep günlük arzla eşitlenmez.

$\Delta Q_d = -b\Delta P;\ \Delta Q_s = d\Delta P$

Back to English

Read the axes and the gap

Eksenlere önce bak: bu notta yatay P, dikey Q. Nokta sırası (P,Q) olur. Talep fazlası alıcıların planının, arz fazlası satıcıların planının daha büyük olduğunu söyler. Olağan yorumda fiyat üzerinde sırasıyla yukarı ve aşağı baskı vardır; fakat statik denklemler ayarlama hızını veya dengeye kesin yakınsamayı kanıtlamaz.



Back to English

A positive price is not enough

b+d pozitif olduğundan Q* işaretini ad−bc belirler. Pozitif miktar için ad>bc gerekir. İki yanı pozitif bd'ye bölünce a/b>c/d elde edilir: talebin sıfıra indiği fiyat, arzın sıfır olduğu fiyattan yüksek olmalıdır. Negatif miktar çıkarsa cebir doğru olabilir ama ekonomik koşul sağlanmaz.

P*=(a+c)/(b+d); Q*=(ad−bc)/(b+d)

Back to English

ME-01-C1 Question support

P bir artınca miktarlar nasıl değişir?

Return to foundations

ME-01-C2 Question support

b+d ile bölme neden geçerli?

Return to foundations

Derive the equilibrium price

Eşitliği koruyan işlemlerle P'yi yalnız bırak.

$$Q_d = Q_s$$

Denge koşulu, alıcıların planladığı miktarın satıcıların planladığı miktara eşit olmasıdır. Henüz sayısal bir fiyat bilmiyoruz.

$$a - bP = -c + dP$$

Qd yerine a−bP, Qs yerine −c+dP yazdık. Bu eşitlik her P için değil, aradığımız denge fiyatında sağlanacak.

$$a - bP + bP = -c + dP + bP$$

"Karşı tarafa atma" yok: eşitliği korumak için iki tarafa da aynı bP'yi ekliyoruz. Sol tarafta −bP ile +bP birbirini götürecek.

$$a = -c + dP + bP$$

Sol taraftaki toplam sıfır olur. Sağ taraftaki dP ve bP'yi henüz birleştirmedik; hangi işlemden geldikleri görünür kalsın.

$$a + c = -c + dP + bP + c$$

Sağdaki −c'yi yok etmek için iki tarafa +c ekledik. Tek bir tarafı değiştirmek eşitliği bozardı.

$$a + c = dP + bP$$

Sağ tarafta −c+c=0. Artık sabit parametreler solda, P içeren terimler sağda.

$$a + c = (d + b)P = (b + d)P$$

dP+bP, ortak çarpan P alınarak (d+b)P olur. Toplamanın değişme özelliğiyle d+b=b+d. P kaybolmadı; parantezin çarpanı oldu.

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{(b + d)P}{b + d}$$

b ve d pozitif olduğu için b+d>0; bölme yasaldır. Sağdaki aynı b+d çarpanları sadeleşir.

$$P^* = \frac{a + c}{b + d}$$

P* yıldızı, “denge değeri” anlamına gelir. Formülde yalnızca a,b,c,d var; buna reduced form denir. Tek çözüm vardır çünkü P’nin katsayısı b+d sıfır değildir. Bu, fiyatın zamanla buraya mutlaka geleceğini kanıtlamaz.

Back to English

Derive the equilibrium quantity

Fiyatı talebe koy ve her cebir adımının nedenini izle.

$$Q^* = a - bP^*$$

Denge fiyatı bulunduktan sonra denge miktarını iki denklemden herhangi biri verir. Önce talebi seçiyoruz.

$$Q^* = a - b \quad \frac{a + c}{b + d}$$

P* yerine (a+c)/(b+d) yazdık. b, kesrin tamamını çarpar.

$$Q^* = \quad \frac{a(b + d)}{b + d} - \frac{b(a + c)}{b + d}$$

Tek başına duran a’nın paydası 1’dir. Değeri değiştirmeden a’yı (b+d)/(b+d)=1 ile çarpıyoruz. Bu yüzden pay a değil, a(b+d) olur.

$$Q^* = \quad \frac{a(b + d) - b(a + c)}{b + d}$$

Paydalar aynı olduğundan paylar arasındaki çıkarma tek kesrin payında yapılır; payda b+d olarak kalır.

$$Q^* = \quad \frac{ab + ad - (ab + bc)}{b + d}$$

a(b+d)=ab+ad ve b(a+c)=ab+bc. İkinci parantezin önündeki eksi işaretini koruyoruz.

$$Q^* = \quad \frac{ab + ad - ab - bc}{b + d}$$

−(ab+bc)=−ab−bc. En sık hata, ikinci terimin işaretini değiştirmemektir.

$$Q^* = \quad \frac{ad - bc}{b + d}$$

Paydaki ab ile −ab sıfırlanır; ad−bc kalır. Fiyat pozitif olsa bile bu pay negatif olabilir. Dolayısıyla ekonomik anlamı ayrıca kontrol etmeliyiz.

Back to English

Source example - negative intersection (PDF pp.3-4)

Kaynak a=1, b=10, c=10, d=1 sayılarıyla zayıf talep/yüksek arz eşiğini gösteriyor. Matematiksel kesişimi ekonomik denge diye otomatik kabul etme.

Source PDF pages 3-4

$Qd=1-10P$; $Qs=-10+P$

a = 1, b = 10, c = 10, d = 1: arz sabiti −10, arz eğimi +1.

$1-10P=-10+P$

Dengeyi aramak için ortak fiyat P'de eşitlik kur.

$1-10P+10P=-10+P+10P \rightarrow 1=-10+11P$

Sağdaki 1 P +10 P=11 P.

$1+10=-10+11P+10 \rightarrow 11=11P \rightarrow P^*=1$

Fiyat pozitiftir, fakat miktarı henüz denetlemedik.

$Qd(1)=1-10=-9$; $Qs(1)=-10+1=-9$

Cebir tutarlı ama negatif miktar gerçek pozitif ticaret değildir.

$Q^*=(ad-bc)/(b+d)=(1-100)/11=-99/11=-9$

Paydaki ad −bc negatiftir; payda pozitiftir.

$a/b=1/10 < c/d=10$

Pozitif talep P<0,1; pozitif arz P>10 ister. Bu aralıklar kesişmediği için pozitif ticaret dengesi yoktur. Kaynak s 4 grafiği de negatif Q kesişimini gösterir.

$P^*=1$; $Q^*=-9$

Sınav yorumu: Cebirsel kesişim fiyatı pozitif olsa da miktar negatiftir; gerçek pozitif ticaret olarak yorumlanamaz. Pozitif talep ve pozitif arzın fiyat aralıkları kesişmediğinden bu modelde pozitif ticaret dengesi yoktur.

Back to English

Source example - a feasible market (PDF p.4)

Kaynağın ikinci örneğini yuvarlama yapmadan çözelim. Böylece iki denklemde miktar kontrolü tam eşitlik verir.

Source PDF pages 4

$21-3P=-4+8P$

a = 21, b = 3, c = 4, d = 8 parametrelerini tanı.

$21-3P+3P=-4+8P+3P \rightarrow 21=-4+11P$

Sağda 8 P +3 P=11 P.

$21+4=-4+11P+4 \rightarrow 25=11P$

Sağdaki −4 ve +4 sadeleşir.

$P^*=25/11$

Kesri koruyoruz; yaklaşık = 2,273 olsa da şimdi yuvarlama yapma.

$Qd=21-3(25/11)=231/11-75/11=156/11$

21 sayısını 231/11 yazdık; paylar 231−75=156.

$Qs=-4+8(25/11)=-44/11+200/11=156/11$

İki denklem aynı miktarı veriyor:$156/11 \approx 14{,}182$.

$ad-bc=21\cdot 8-3\cdot 4=168-12=156>0;\ 1/2<25/11<7$

c/d=4/8=1/2 ve a/b=21/3=7. Denge fiyatı arada, denge miktarı pozitif. Bu sayılar kaynak s 4’teki sonucu tam olarak doğrular.

$P^*=25/11;\ Q^*=156/11>0$

Sınav yorumu: Denge fiyatında alıcıların istediği miktar ile satıcıların sunduğu miktar aynı ve pozitiftir. Fiyatın iki sıfır-miktar eşiği arasında olması bu ekonomik geçerliliği ayrıca doğrular; model tek başına fiyatın dengeye ulaşma hızını söylemez.

Back to English

ME-01-W1 Worked example support

İki yana aynı işlemi uygulayarak fiyatı bul, miktarı iki denklemde kontrol et ve anlamını açıkla.

$$80 - 2P = -10 + P$$

Dengeyi kurduk. Burada a=80, b=2, c=10, d=1. Arz denkleminin sabiti −10’dur; c ise +10.

$$80 - 2P + 2P = -10 + P + 2P$$

İki tarafta aynı işlem var. Sol tarafta −2P+2P=0 olacak.

$$80 = -10 + 3P$$

Sağda aynı bilinmeyeni içeren terimlerin katsayılarını topladık: 1+2=3.

$$80 + 10 = -10 + 3P + 10$$

Sağ taraftaki negatif sabiti gidermek için iki tarafa da 10 ekledik.

$$90 = 3P$$

Artık tek bilinmeyenli basit bir denklem var. P’nin üç katı 90 ise P kaç olmalı?

$$\frac{90}{3} = \frac{3P}{3} \Rightarrow P^* = 30$$

3 sıfır olmadığı için bölme yapılabilir. 90/3=30 ve 3P/3=P. Bu fiyatın miktarını henüz hesaplamadık.

$$Q_d(30) = 80 - 2(30) = 80 - 60 = 20$$

Fiyatı 30 bulduğumuz için talep miktarı 20 olur. Yalnızca fiyatı bulmak tam çözüm değildir.

$$Q_s(30) = -10 + 30 = 20$$

Arz da 20 çıktı. İki miktarın eşit olması cebirimizin önemli kontrolü; farklı çıksaydı işlemleri geri izlerdik.

$$10 < 30 < 40 \quad ; \quad Q^* = 20 > 0$$

Arzın sıfır olduğu fiyat c/d=10; talebin sıfır olduğu fiyat a/b=40. P*=30 bu ikisinin arasında. Fiyat 30 birimken, seçilen dönemde alıcılar 20 birim almak, satıcılar 20 birim satmak ister. “Denge” bu planların uyuşmasıdır.

Neden yalnızca fiyatı yazmak yetmez?

Return to the worked example

ME-01-S1 Question support

Qd=100−2P ve Qs=−20+2P için denge fiyatını ve miktarını bul. Her cebir adımını göster, sonucu iki denklemde doğrula ve ekonomik olarak yorumla.

Dengeyi yorumla; iki denklemde kontrol neyi gösterir?

Return to the problem

ME-01-S2 Question support

Talep Qd=80−2P'den Qd=92−2P'ye değişiyor; arz Qs=−10+P olarak kalıyor. Yeni dengeyi bul ve ME-01-W1 ile karşılaştır. Eski fiyattaki talep fazlasını açıkla. Talep kayması ile arz doğrusu üzerinde hareketi ayır.

Eski fiyattaki talep fazlası ile son denge miktarındaki artışı ayır.

Return to the problem

ME-01-S3 Question support

Qd=12−3P ve Qs=−10+2P için cebirsel kesişimi bul. Bu, ekonomik olarak mümkün bir pozitif ticaret dengesi mi? Miktarı ve iki fiyat kesişimini kullanarak gerekçelendir.

Cebir doğru olsa da pozitif ticaret neden mümkün olmayabilir?

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-01-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-01-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-01-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-01-S1

Start with 100 − 2P = −20 + 2P. Add 2P to both sides; then add 20. Do not forget to find the quantity.

100−2P=−20+2P yaz. İki tarafa 2P ekleyince 100=−20+4P olur. Sonra iki tarafa 20 ekle. Fiyatı bulduktan sonra miktarı da hesapla.

Return and complete your attempt

ME-01-S2

Predict the direction first. At the old price P = 30, compute the new Qd and the unchanged Qs. Then solve 92 − 2P = −10 + P.

Önce yönü tahmin et. Eski fiyat 30’da yeni talep 92−60=32; arz hâlâ 20. Talep fazlası 12’dir. Yeni denge için 92−2P=−10+P denklemini çöz.

Return and complete your attempt

ME-01-S3

Equality alone is not enough. Find P, substitute it, then compare a/b with c/d. Keep a negative result-it may be the lesson, not a calculation error.

Denklemleri eşitle, P’yi bul ve miktarı hesapla. Negatif miktar çıkınca hemen işlemi değiştirme. Sonra a/b ile c/d’yi karşılaştır: pozitif talep ve pozitif arz için ortak bir fiyat aralığı var mı?

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-01-W1 Model interpretation

At a price of 30 per unit, buyers and sellers plan the same quantity, 20 units per stated period. Both schedules agree and the quantity is positive, so this is feasible positive trade.

Yalnız fiyat miktarı söylemez. Talep $80-2(30)=20$, arz $-10+30=20$ olur. Ortak miktar ve işaret koşulları ekonomik yorumun parçasıdır.

Check the explanation

☐ Gives the common quantity 20.

☐ Verifies both schedules at P=30.

☐ States that both plans agree and quantities are nonnegative.

ME-01-S1 Solution

$$100-2P=-20+2P$$

Set demand equal to supply at one common price.

Denge koşulu Qd=Qs; iki davranış denklemini aynı fiyat için eşitle.

$$100 - 2P + 2P = -20 + 2P + 2P$$

Add 2P to both sides.

Soldaki $-2P$ terimini yok etmek için iki yana $+2P$ ekle.

$$100 = -20 + 4P$$

Combine the price terms.

Sağdaki $2P+2P=4P$; soldaki $-2P+2P=0$.

$$100 + 20 = -20 + 4P + 20$$

Add 20 to both sides.

Sağdaki -20'yi yok etmek için iki yana 20 ekle.

$$120 = 4P \rightarrow P^* = 120/4 = 30$$

Combine constants, then divide by nonzero 4.

$100+20=120$ ve $120/4=30$. İki yan aynı sıfır olmayan sayıya bölünür.

$$Qd(30) = 100 - 2(30) = 40$$

Substitute P=30 into demand.

$100-2\times30=100-60=40$.

$$Qs(30) = -20 + 2(30) = 40$$

Substitute the same price into supply.

$-20+2\times30=-20+60=40$; talep ve arz eşittir.

$$c/d = 10 < 30 < 50 = a/b$$

Check the feasible price interval.

Arz sıfır noktası 20/2=10, talep sıfır noktası 100/2=50; denge ikisinin arasındadır.

Model English interpretation

At a price of 30, buyers and sellers both plan to trade 40 units per chosen period.

Türkçe reasoning

Fiyat 30 iken alıcılar ve satıcılar seçilen dönemde 40 birimlik aynı miktarı planlar. $Q^*=40>0$; fiyat da 10 ile 50 eşikleri arasındadır. Bu iki kontrol ekonomik anlamı doğrular.

Check your explanation

☐ Checks the original equations.

☐ States feasibility or the model limit.

☐ Uses the supplied economic meaning rather than an invented one.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-01-S2 Solution

$$92-2P=-10+P$$

Set demand equal to supply at one common price.

Denge koşulu Qd=Qs; iki davranış denklemini aynı fiyat için eşitle.

$$92 - 2P + 2P = -10 + P + 2P$$

Add 2P to both sides.

Yeni talep ve değişmeyen arz eşitliğinde iki yana 2P ekle.

$$92 = -10 + 3P$$

Combine P+2P=3P.

P kaybolmaz; aynı bilinmeyenin katsayılarını toplarız.

$$92 + 10 = -10 + 3P + 10$$

Add 10 to both sides.

Sağdaki −10 ile +10 birbirini götürür.

$$102 = 3P \rightarrow P^* = 102/3 = 34$$

Combine constants and divide by 3.

92+10=102 ve 102/3=34.

$$Qd(34) = 92 - 68 = 24$$

Evaluate the new demand at P=34.

92−2×34=92−68=24.

$$Qs(34) = -10 + 34 = 24$$

Verify with unchanged supply.

−10+34=24; her iki plan aynı miktarı verir.

$$\Delta P = 34 - 30 = +4;\ \Delta Q = 24 - 20 = +4$$

Compare with the original W1 equilibrium.

Eski denge (30,20) idi; yeni denge (34,24). Fiyat ve miktar 4’er artar.

Model English interpretation

Demand shifts: at each fixed price, buyers want 12 more units. Supply does not shift; the new equilibrium is a movement along the same supply line. At the old price, excess demand is 32 − 20 = 12. As price rises from 30 to 34, demand falls from 32 to 24 while supply rises from 20 to 24, closing the 12-unit gap. Equilibrium quantity therefore rises by 4, not 12.

Türkçe reasoning

a parametresi 80’den 92’ye yükseldi; her sabit fiyatta talep 12 arttı. Bu bir demand shift / talep kaymasıdır. Arz parametreleri değişmediği için arz doğrusu kaymadı. P 30’dan 34’e çıkınca aynı arz doğrusu üzerinde 20’den 24’e hareket ettik. Talep edilen miktarın 8 azalması ve arz edilen miktarın 4 artması, eski fiyattaki 12 birimlik farkı kapatır. Statik iki durumu karşılaştırıyoruz; fiyatın uyum hızını iddia etmiyoruz.

Check your explanation

☐ Checks the original equations.

☐ States feasibility or the model limit.

☐ Uses the supplied economic meaning rather than an invented one.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-01-S3 Solution

$$12-3P=-10+2P$$

Set demand equal to supply at one common price.

Denge koşulu Qd=Qs; iki davranış denklemini aynı fiyat için eşitle.

$$12 - 3P + 3P = -10 + 2P + 3P$$

Add 3P to both sides.

Soldaki −3P terimini yok etmek için iki tarafa aynı 3P eklenir.

$$12 = -10 + 5P$$

Combine 2P+3P=5P.

Sağdaki fiyat katsayısı 5; soldaki fiyat terimleri sıfırlanır.

$$12 + 10 = -10 + 5P + 10$$

Add 10 to both sides.

Sağdaki sabit −10’u aynı ekleme işlemiyle yok et.

$$22 = 5P \rightarrow P^* = 22/5 = 4.4$$

Divide by nonzero 5.

22/5=4,4 pozitif bir fiyattır; miktarın işareti henüz bilinmiyor.

$$Qd(4.4) = 12 - 13.2 = -1.2$$

Substitute into demand.

12−3×4,4=12−13,2=−1,2: ekonomik miktar koşulu sağlanmaz.

$$Qs(4.4) = -10 + 8.8 = -1.2$$

Verify the negative result in supply.

−10+2×4,4=−10+8,8=−1,2; cebirsel sonuç doğrulanır.

$$a/b = 12/3 = 4 < 10/2 = 5 = c/d$$

Compare the two zero-quantity prices.

Pozitif talep için P<4, pozitif arz için P>5 gerekir. Ortak bir fiyat aralığı yoktur.

Model English interpretation

The lines intersect algebraically, but not at a feasible positive traded quantity. Positive demand requires $P < 4$; positive supply requires $P > 5$. There is no price satisfying both in this linear model.

Türkçe reasoning

Cebirsel kesişim doğru: iki denklem de −1,2 veriyor. Ama negatif miktar gerçek ticaret değildir. Pozitif talep P<4; pozitif arz P>5 ister. Bu koşulları aynı anda sağlayan fiyat yoktur. Dolayısıyla orijinal doğrusal denklemlerde ekonomik olarak mümkün bir pozitif ticaret dengesi yoktur. “Hiçbir modelde denge yok” gibi daha geniş bir sonuç çıkarmıyoruz.

Check your explanation

- ☐ Checks the original equations.
- ☐ States feasibility or the model limit.
- ☐ Uses the supplied economic meaning rather than an invented one.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-01-C1 Answer A

Correct. A one-unit rise in P changes Qd by −b and Qs by +d. A positive b does not mean a positive demand slope.

Doğru. ΔQd = −b, ΔQs = +d. Fiyat değişkeninin katsayısı, fiyat 1 birim arttığında miktarın kaç birim değiştiğini verir. b pozitif olsa da talep eğimi −b'dir.

If you chose differently: Read the coefficient together with its sign: −bP in demand and +dP in supply. Try again.

Fiyatın katsayısını işaretiyle birlikte oku: talepte −bP, arzda +dP. "Parametre pozitif" demek, her eğim pozitif demek değildir. Yeniden dene.

ME-01-C2 Answer B

Correct. Since b and d are positive, b + d is nonzero. Dividing both sides by the same nonzero number preserves equality.

Doğru. b > 0 ve d > 0 olduğundan b + d > 0; payda sıfır değildir. Sıfıra bölme yapılamaz. Burada bölme, eşitliğin iki tarafını aynı sıfırdan farklı sayıya bölmektir.

If you chose differently: Can a sum of two positive numbers equal zero? Division is valid here because the denominator is nonzero.

Pozitif bir toplam sıfır olabilir mi? Bölme yapabilmek için ihtiyaç duyduğumuz koşul, bölenin sıfır olmamasıdır. Burada bunu b,d > 0 sağlar.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I explain the symbols and common-price condition.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I derive P* and Q* with justified operations.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I check both schedules and distinguish algebraic validity from economic feasibility.

Okumak ile yardımsız kurmak farklıdır. İşaret, yerine koyma ve ekonomik anlamı ayrı ayrı denetle.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Source PDF pages 1-4. The source uses P on the horizontal axis. Exact source examples are retained alongside the original pilot problems.

ME-02 National Income Equilibrium & Multiplier

Source PDF pages 5-7

Derive equilibrium income and consumption, explain the multiplier, and check when the formula is valid.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

Two endogenous variables, not one

Income determines consumption, while consumption is part of the spending that must equal income. Solve the two relationships **together**. This is a simple, closed-economy model without taxes, imports or interest-rate feedback.

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = C_0 + bY$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
Y	National income/output per period	Dönem başına milli gelir/üretim
C	Consumption expenditure, endogenous	Tüketim harcaması; içsel değişken
C_0	Autonomous consumption	Gelire bağlı olmayan tüketim
I_0	Autonomous investment, exogenous	Dışsal yatırım harcaması

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
G_0	Government expenditure, exogenous	Dışsal kamu harcaması
b	Marginal propensity to consume (MPC)	Marjinal tüketim eğilimi
*	Equilibrium value	Denge değeri
Δ	New value minus old value	Yeni değer eksi eski değer

Türkçe explanation

Read autonomous and induced consumption separately

C_0 is the intercept. bY is induced consumption. With **0 < b < 1**, one extra unit of income raises consumption by b units. All spending and income amounts use the same currency scale and time period.

$$\Delta C = b\Delta Y \quad (C_0 \text{ and } b \text{ fixed})$$

Türkçe explanation

An accounting relation is not an automatic equilibrium story

Here $Y = C + I_0 + G_0$ is imposed as the model's goods-market equilibrium condition: planned spending equals output. The equations identify a consistent pair (Y*, C*); by themselves they do not prove a time path or a speed of adjustment.

Türkçe explanation

Why an initial spending increase is not the final income increase

If G_0 increases while C_0, I_0 and b stay fixed, the new equilibrium must satisfy $\Delta Y = \Delta C + \Delta G_0$. Because $\Delta C = b\Delta Y$, only the fraction $1-b$ of the income increase is available to match the autonomous increase.

$$(1 - b)\Delta Y = \Delta G_0$$

Türkçe explanation

Read the multiplier as a conditional comparison

The multiplier $k = 1/(1-b)$ compares two equilibria with the **same b**. If b = 0.5, k = 2; if b = 0.75, k = 4. A larger b makes the model's induced-consumption feedback stronger.

$$k = 1/(1 - b) > 1 \quad \text{when} \quad 0 < b < 1$$

Türkçe explanation

A useful geometric explanation - not an extra forecast

The total $1+b+b^2+\ldots$ equals $1/(1-b)$ when $0<b<1$. It illustrates why repeated induced spending gives the same multiplier. Interpreting those terms as literal periods requires an additional adjustment mechanism.

$$1 + b + b^2 + \ldots = 1/(1 - b)$$

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-02-C1

Which quantities are endogenous in this model?

A. Y and C

B. C_0 and I_0

C. G_0 and b

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-02-C2

With b = 0.75 and only $\Delta G_0 = 20$, which pair is consistent?

A. $\Delta Y = 20$, $\Delta C = 0$

B. $\Delta Y = 80$, $\Delta C = 60$

C. $\Delta Y = 60$, $\Delta C = 80$

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-02-C3

Why may we divide $Y-bY=A$ by $1-b$?

A. Because b is a variable we can cancel

B. Because $0<b<1$ implies $1-b>0$

C. Because income is always 1

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Equilibrium income, one legal operation at a time

Replace consumption by its behavioral equation, then isolate income.

$Y = C + I_0 + G_0$

Start from goods-market equilibrium.

$C = C_0 + bY$

Read the consumption rule.

$Y = C_0 + bY + I_0 + G_0$

Substitute C_0+bY for C.

$Y - bY = C_0 + bY + I_0 + G_0 - bY$

Subtract bY from both sides.

$Y - bY = C_0 + I_0 + G_0$

Cancel $+bY-bY$ on the right.

$(1 - b)Y = C_0 + I_0 + G_0$

Factor Y: $1Y-bY=(1-b)Y$.

$$(1-b)Y/(1-b) = (C_0+I_0+G_0)/(1-b)$$

Divide both sides by $1-b>0$.

$$Y^* = (C_0 + I_0 + G_0)/(1 - b)$$

The reduced form contains only given values.

Detailed Turkish reasoning

Equilibrium consumption - do not lose the autonomous term

Use Y* in the consumption equation and show the common-denominator step.

$$C^* = C_0 + bY^*$$

Return to the consumption rule.

$$C^* = C_0 + b(C_0+I_0+G_0)/(1-b)$$

Substitute the entire income fraction.

$$C^* = [C_0(1-b)+b(C_0+I_0+G_0)]/(1-b)$$

Give C_0 the same denominator.

$$C^* = [C_0-bC_0+bC_0+bI_0+bG_0]/(1-b)$$

Distribute both products.

$$C^* = [C_0+bI_0+bG_0]/(1-b)$$

Cancel $-bC_0+bC_0$.

$$C^* = [C_0+b(I_0+G_0)]/(1-b)$$

Factor b from the last two terms.

Detailed Turkish reasoning

Derive a change formula by subtracting two equilibria

Keep b fixed. Subtract the old equilibrium from the new one rather than memorizing a multiplier.

$$(1-b)Y_1^* = C_{0,1} + I_{0,1} + G_{0,1}$$

Write the new equilibrium.

$(1-b)Y_0^* = C_{0,0} + I_{0,0} + G_{0,0}$

Write the old equilibrium with the same b.

$(1-b)(Y_1^*-Y_0^*) = \Delta C_0 + \Delta I_0 + \Delta G_0$

Subtract old from new and factor 1−b.

$\Delta Y^* = [\Delta C_0+\Delta I_0+\Delta G_0]/(1-b)$

Divide by the positive coefficient.

$\Delta Y^* = \Delta G_0/(1-b)$ if $\Delta C_0=\Delta I_0=0$

For a government-spending-only change, remove the zero changes.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Source example - PDF p.6

Reconstruct the source’s numbers: $Y^*=1000$, $C_0=100$, $I_0=150$ and $G_0=250$. The consumption propensity consistent with these values is b=0.5.

Source PDF pages 6

$1000 = C^* + 150 + 250$

Use the equilibrium expenditure equation.

$C^* = 1000-150-250 = 600$

Subtract the autonomous investment and government expenditure.

$600 = 100 + 1000b$

Use $C^*=C_0+bY^*$.

$600-100 = 1000b \rightarrow 500=1000b \rightarrow b=0.5$

Subtract 100, then divide by nonzero 1000.

$Y^*=(100+150+250)/(1-0.5)=500/0.5=1000$

Recompute income from the reduced form.

$C^*=[100+0.5(150+250)]/0.5=300/0.5=600$

Verify consumption’s reduced form too.

$1000 = 100+0.5(1000)+150+250$

Check the single substituted equation displayed in the source.

$Y^*=1000$; $C^*=600$; $k=2$

Exam-ready interpretation: The model predicts income of 1000 and consumption of 600 in the same period. Consumption includes autonomous 100 and induced 500. Holding b=0.5 and other autonomous components fixed, one extra unit of autonomous spending raises equilibrium income by two units.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-02-W1 Solve income and consumption together

Given Y = C + 100 + 140 and C = 60 + 0.75Y, derive equilibrium Y and C. Verify both original equations and calculate the spending multiplier. Explain why the income is not just 60 + 100 + 140.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$Y = 60 + 0.75Y + 100 + 140$

Substitute consumption into expenditure.

$Y = 300 + 0.75Y$

Add autonomous spending: 60+100+140=300.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$Y - 0.75Y = 300 + 0.75Y - 0.75Y$

Subtract 0.75Y from both sides.

$0.25Y = 300$

Combine 1Y−0.75Y.

$Y^* = 300/0.25 = 1200$

Divide by 0.25, which is nonzero.

$C^* = 60 + 0.75(1200) = 60 + 900 = 960$

Use the consumption rule at the derived income.

$960 + 100 + 140 = 1200 = Y^*$

Verify the expenditure condition independently.

$k = 1/(1 - 0.75) = 4$

Read the conditional spending multiplier.

Interpret before reading the model answer

Explain the result, its verification and its economic meaning or limits.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-02-S1 Rebuild a new income model

Given Y = C + 80 + 120 and C = 40 + 0.6Y, derive Y*, C* and the multiplier. Verify both original equations and explain the autonomous versus induced parts of consumption.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-02-S1 Interpretation and verification

Write a two-sentence exam answer interpreting your computed equilibrium income, consumption and multiplier. State which quantities are held fixed.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-02-S2 Transfer: spending rises by 20

Start from ME-02-W1. Increase G_0 from 140 to 160 while $C_0=60$, $I_0=100$ and $b=0.75$ stay fixed. Predict the directions, calculate new Y* and C*, then calculate ΔY and ΔC. Explain why the final income change differs from the initial government-spending change.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-02-S2 Interpretation and verification

Explain in exam language how the autonomous spending increase and the induced consumption response combine into your calculated income change. Distinguish changes from final levels.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-02-S3 A formula has a boundary

A student changes ME-02-W1 to b=1 while keeping C_0=60, I_0=100 and G_0=140. They report an “infinite equilibrium income.” Return to the original equations and decide whether any finite equilibrium exists. Then explain what changes if all three autonomous components are zero and b=1.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-02-S3 Interpretation and verification

Explain why undefined division is not an infinite economic equilibrium. Contrast inconsistency with infinitely many finite solutions.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

Two endogenous variables, not one

Gelir tüketimi etkiler; tüketim de gelire eşitlenen toplam harcamanın bir parçasıdır. Bu yüzden “önce Y’yi biliyoruz, sonra C’yi yazıyoruz” diyemeyiz: **Y ve C birlikte belirlenir**. İki denklem, iki içsel bilinmeyen vardır.

Bu ünitede vergi, ithalat, faiz tepkisi ve fiyat düzeyi değişimi yoktur. Kaynağın ilerleyen vergi/iki ülke modellerini buraya sessizce eklemiyoruz. Sonuçlar bu basitleştirmeler altında geçerlidir.

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = C_0 + bY$$

Back to English

Read autonomous and induced consumption separately

Autonomous / otonom: C_0 bu modelde mevcut gelirden bağımsız verilmiştir; tüketim doğrusunun Y=0 kesişimidir. “Hiçbir koşulda değişemez” anlamına gelmez. Yeni bir senaryoda C_0 değişebilir.

Induced / uyarılmış: bY gelirle birlikte değişen tüketimdir. Y bir artınca $C_0+b(Y+1)-(C_0+bY)=b$. Böylece b’nin anlamı doğrudan denklemden çıkar. b boyutsuzdur; Y ve C aynı birimdedir. C_0, I_0, G_0 için negatif olmayan değerler kullandığımız örneklerde Y* ve C* de negatif olmayacaktır.

$$\Delta C = b\Delta Y \quad (C_0 \text{ and } b \text{ fixed})$$

Back to English

An accounting relation is not an automatic equilibrium story

Denklemi bu modelin **denge koşulu** olarak kullanıyoruz: planlanan toplam harcama üretime eşit. Gerçekleşmiş milli gelir muhasebesiyle her anda gerçekleşen planlı harcamayı aynı şey sanma; stok değişimleri gibi konular burada modellenmiyor.

Burada bulduğumuz, iki koşulu aynı anda sağlayan (Y*, C*) çiftidir. Yıldız “denge”, alttaki 0 ise “otonom/dışarıdan verilen bileşen” etiketidir; üs veya sıfırla çarpma değildir.

Back to English

Why an initial spending increase is not the final income increase

Kamu harcaması 20 artınca “gelir de yalnızca 20 artar” demek tüketimin gelirle değiştiğini göz ardı eder. Yeni gelir daha yüksek tüketimle birlikte tutarlı olmalıdır.

İki dengeyi karşılaştır: $\Delta Y=\Delta C+\Delta G_0$ ve $\Delta C=b\Delta Y$. Yerine koyunca $\Delta Y=b\Delta Y+\Delta G_0$, yani $(1-b)\Delta Y=\Delta G_0$. **1−b** gelir artışının tüketilmeyen payıdır: marjinal tasarruf eğilimi. Bu yüzden başlangıç artışını 1−b’ye böleriz.

$$(1-b)\Delta Y=\Delta G_0$$

Back to English

Read the multiplier as a conditional comparison

b=0,5 iken ek gelirin yarısı tüketilir; 1−b=0,5 olduğundan k=2. b=0,75 iken tüketilmeyen pay 0,25’tir; aynı otonom harcama değişimiyle tutarlı gelir değişimi daha büyüktür: k=4.

Bu katsayı gerçek ekonomide her zaman aynı büyüklükte gerçekleşecek bir politika garantisi değildir. Modeldeki sabit fiyat, dışsallık ve diğer sabitler varsayımına bağlıdır. b de değişirse eski çarpanı yeni ΔG’ye uygulamak yerine iki dengeyi ayrı hesapla.

$$k=1/(1-b)>1 \quad \text{when} \quad 0<b<1$$

Back to English

A useful geometric explanation - not an extra forecast

Bir birimlik ilk harcamanın b’si, sonra b^2’si, sonra b^3’ü kadar yeniden tüketim bağlantısı düşünmek çarpanı sezdirir. Bunu matematikle doğrulayalım: $S_n=1+b+\ldots+b^n$; $bS_n=b+b^2+\ldots+b^{n+1}$. Çıkarınca $(1-b)S_n=1-b^{n+1}$. Dolayısıyla $S_n=(1-b^{n+1})/(1-b)$. $0<b<1$ olduğundan b^{n+1} sıfıra yaklaşır ve toplam $1/(1-b)$ olur.

Bu bir **yardımcı matematik açıklamasıdır**. Statik kaynak modeli tek başına her terimin bir takvim döneminde gerçekleştiğini söylemez.

$$1+b+b^2+\ldots=1/(1-b)$$

Back to English

ME-02-C1 Question support

Hangi değişkenleri modelin içinde birlikte çözüyoruz?

Return to foundations

ME-02-C2 Question support

b=0,75 sabit ve yalnız G_0 20 artarsa gelir/tüketim değişimleri hangisi olur?

Return to foundations

ME-02-C3 Question support

Y −bY=A ifadesinde neden 1−b’ye bölebiliriz?

Return to foundations

Equilibrium income, one legal operation at a time

C bir bilinmeyen olduğu için onu silmiyoruz; C’nin neye eşit olduğunu kullanıp Y cinsinden yazıyoruz.

$$Y = C + I_0 + G_0$$

Planlanan harcamayla gelirin eşit olması gerekiyor.

$$C = C_0 + bY$$

Otonom ve gelire bağlı tüketim bileşenlerini ayır.

$$Y = C_0 + bY + I_0 + G_0$$

C’nin yerine tüm C_0+bY ifadesi geçer; bY’yi atlama.

$$Y - bY = C_0 + bY + I_0 + G_0 - bY$$

Eşitliği korumak için iki yanda aynı çıkarma var.

$$Y - bY = C_0 + I_0 + G_0$$

Gelir terimlerini solda topladık; sağda yalnız dışsal değerler kaldı.

$$(1 - b)Y = C_0 + I_0 + G_0$$

Y −b değildir: b, Y’nin katsayısıdır. Ortak çarpan Y parantez dışına alınır.

$$(1-b)Y/(1-b) = (C_0+I_0+G_0)/(1-b)$$

$0<b<1$ bölmenin geçerli olmasını sağlar; b=1 olsaydı aynı işlem yapılamazdı.

$$Y^* = (C_0 + I_0 + G_0)/(1 - b)$$

Y* yalnız C_0, I_0, G_0, b ile yazılıyor. Bu nedenle indirgenmiş biçimdir; tek denge geliri, sıfır olmayan katsayı sayesinde bulunur.

Back to English

Equilibrium consumption - do not lose the autonomous term

Geliri bulduktan sonra C*'yi de hesaplamalıyız. Kaynak s 6 bu ikinci indirgenmiş biçimi çıkarıyor.

$C^* = C_0 + bY^*$

Denge tüketimini hesaplamak için aynı davranış denklemine geri dön.

$C^* = C_0 + b(C_0+I_0+G_0)/(1-b)$

b kesrin tamamını çarpar; yalnız C_0'yı veya yalnız I_0'yı çarpmaz.

$C^* = [C_0(1-b)+b(C_0+I_0+G_0)]/(1-b)$

$C_0=C_0(1-b)/(1-b)$; 1 ile çarptığımız için değer değişmiyor.

$C^* = [C_0-bC_0+bC_0+bI_0+bG_0]/(1-b)$

$C_0(1-b)=C_0-bC_0$; $b(C_0+I_0+G_0)=bC_0+bI_0+bG_0$.

$C^* = [C_0+bI_0+bG_0]/(1-b)$

Otonom tüketim C_0 yok olmaz; sadece karşıt bC_0 terimleri gider.

$C^* = [C_0+b(I_0+G_0)]/(1-b)$

$bI_0+bG_0=b(I_0+G_0)$. Kontrol için $C^*+I_0+G_0$ ifadesinin Y* verdiğini de doğrula.

Back to English

Derive a change formula by subtracting two equilibria

Δ işareti yeni eksi eski demektir. Sabit b varsayımı bu çıkarma için önemlidir.

$(1-b)Y_1^* = C_{0,1} + I_{0,1} + G_{0,1}$

Alt etiket 1 yeni senaryoyu gösterir; $C_{0,1}$ otonom tüketimin yeni değeridir.

$(1-b)Y_0^* = C_{0,0} + I_{0,0} + G_{0,0}$

0 eski senaryoyu gösterir. Bu alt etiketler, otonom bileşendeki 0'dan farklı bir görevde; amaç yalnız iki senaryoyu ayırmaktır.

$(1-b)(Y_1^*-Y_0^*) = \Delta C_0 + \Delta I_0 + \Delta G_0$

Sağdaki her değişim yeni değer eksi eski değerdir. Aynı katsayı 1−b solda ortak çarpan olur.

$\Delta Y^* = [\Delta C_0+\Delta I_0+\Delta G_0]/(1-b)$

Bu formül b sabitken birden fazla otonom harcama değişimini de kapsar.

$\Delta Y^* = \Delta G_0/(1-b) \quad \text{if } \Delta C_0=\Delta I_0=0$

Yalnız G_0 değişiyorsa diğer iki Δ sıfırdır. Çarpan $k=\Delta Y^*/\Delta G_0=1/(1-b)$, $\Delta G_0\neq 0$ için tanımlanır.

Back to English

Source example - PDF p.6

Kaynak örneğinin bütün sayıları: $Y^*=1000$, $C_0=100$, $I_0=150$, $G_0=250$. Kaynaktaki 0,5 katsayısını da doğrudan denklemlerden doğrulayalım.

Source PDF pages 6

$1000 = C^* + 150 + 250$

Gelir 1000 ve iki dışsal harcama 150,250 olduğundan önce C*'yi bulabiliriz.

$C^* = 1000-150-250 = 600$

İki dışsal harcamayı gelirden çıkardık; kalan tüketim 600.

$600 = 100 + 1000b$

Bulduğumuz tüketim ile verilen geliri tüketim denklemine koy.

$600-100 = 1000b \rightarrow 500=1000b \rightarrow b=0.5$

Marjinal tüketim eğilimi 0,5 bulunur;$0<b<1$ koşulunu sağlar.

$Y^*=(100+150+250)/(1-0.5)=500/0.5=1000$

Verilen denge gelirini bağımsız bir yoldan doğruladık.

$C^*=[100+0.5(150+250)]/0.5=300/0.5=600$

Parantez 400, bunun yarısı 200; pay 100+200=300;0,5'e bölünce 600.

$$1000 = 100+0.5(1000)+150+250$$

100+500+150+250=1000; bütün kaynak sayıları aynı dengeyle uyumlu.

Y*=1000; C*=600; k=2

Sınav yorumu yalnız sayıları tekrar etmemeli: gelir ve tüketim aynı dönemin farklı büyüklükleridir. Tüketimin 100 birimi otonom, 500 birimi gelire bağlıdır. Çarpanın 2 olması, tüketimin gelirin iki katı olduğu anlamına gelmez; b ve diğer bileşenler sabitken iki denge arasındaki değişim oranını anlatır.

Back to English

ME-02-W1 Worked example support

Y=C +100+140 ve C=60+0,75 Y için Y* ve C*'yi türet. İki başlangıç denkleminde de kontrol et. Harcama çarpanını bul ve gelirin neden yalnız 60+100+140 olmadığını açıkla.

$$Y = 60 + 0.75Y + 100 + 140$$

C'nin yerine 60+0,75 Y yazdık; I_0=100 ve G_0=140 dışsal.

$$Y = 300 + 0.75Y$$

300 ilk otonom bileşendir; toplam gelir sonucu değildir.

$$Y-0.75Y = 300+0.75Y-0.75Y$$

Sağdaki gelir terimini yok etmek için eşitliğin iki yanında aynı işlem var.

$$0.25Y = 300$$

1−0,75=0,25; Y'nin tamamını kaybetme.

$$Y^* = 300/0.25 = 1200$$

0,25'e bölmek 4 ile çarpmaya eşittir.

$$C^* = 60+0.75(1200) = 60+900 = 960$$

Denge tüketimi 960; bunun 60'ı otonom, 900'ü gelire bağlı.

$$960+100+140 = 1200 = Y^*$$

Yalnız formüle güvenmek yerine başlangıç eşitliğine dönüyoruz.

$$k = 1/(1-0.75) = 4$$

Diğer otonom değerler ve b sabitken 1 birimlik ek otonom harcama iki denge arasında geliri 4 artırır.

Return to the worked example

ME-02-S1 Question support

Y=C +80+120, C=40+0,6 Y. Y*, C* ve çarpanı türet; iki denklemi denetle. Tüketimin otonom ve uyarılmış parçalarını ayır.

Bulduğun denge geliri, tüketim ve çarpanı iki sınav cümlesiyle yorumla. Hangi büyüklüklerin sabit tutulduğunu belirt.

Return to the problem

ME-02-S2 Question support

W 1'den başla; yalnız G_0 140'tan 160'a çıksın. Yeni Y*, C*, ΔY ve ΔC'yi bul. Önce yönleri tahmin et; son gelir değişiminin ilk kamu harcaması değişiminden neden farklı olduğunu açıkla.

Otonom harcama artışı ile uyarılmış tüketim tepkisinin bulduğun gelir değişimini nasıl oluşturduğunu sınav diliyle açıkla. Değişimleri son düzeylerden ayır.

Return to the problem

ME-02-S3 Question support

W 1'de b=1 yapılıyor; diğer değerler sırasıyla 60, 100 ve 140. Bir öğrenci "sonsuz denge geliri" diyor. Başlangıç denklemlerinden sonucun neden geçerli olmadığını açıkla. Sonra b=1 ve bütün otonom bileşenler 0 olursa ne değişir?

Tanımsız bölmenin neden sonsuz ekonomik denge olmadığını açıkla; çelişkiyle çok sayıda sonlu çözümü karşılaştır.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-02-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-02-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-02-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-02-S1

Substitute first: $Y=240+0.6Y$. The remaining coefficient of Y is $1-0.6$, not 0.6.

Önce otonom toplamı bul: $40+80+120=240$. İki yandan 0,6 Y çıkarınca 0,4 Y kalır.

Return and complete your attempt

ME-02-S2

Use either the new equilibrium or $\Delta Y=\Delta G_0/(1-b)$, then verify with the other route. Consumption changes by $b\Delta Y$ because C_0 is fixed.

Yeni otonom toplam 320. Alternatif kontrol: $\Delta G_0=20$ ve çarpan 4; gelir 80 artmalı. C_0 sabit olduğu için $\Delta C=0{,}75\Delta Y$.

Return and complete your attempt

ME-02-S3

Do not divide by zero. Substitute $b=1$ before rearranging. Compare $0=300$ with the special case $0=0$.

$Y=300+Y$ ifadesinin iki yanından Y çıkar. $0=300$ mümkün mü? Otonom toplam 0 olursa aynı çıkarma hangi eşitliği verir?

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-02-W1 Model interpretation

The internally consistent economy has income 1200 and consumption 960 per period. The 300 autonomous total is amplified through the consumption-income relationship; it is not the final income. This is a comparison of model equilibria, not a guaranteed time path.

Dönemlik gelir 1200, tüketim 960’dır. $C_0+I_0+G_0=300$ yalnız otonom harcamaların toplamıdır; $bY=900$ ek tüketimle birlikte harcama 1200 olur. Aynı birimleri koru. Çarpanı zaman içindeki kesin hız veya gerçek dünya politika garantisi gibi yorumlama.

ME-02-S1 Solution

$$Y=40+0.6Y+80+120=240+0.6Y$$

Substitute C and collect constants.

Tüketim denklemindeki iki parçayı da yerine koy.

$$Y-0.6Y=240+0.6Y-0.6Y$$

Subtract the same income term from both sides.

Sağdaki +0,6 Y ve −0,6 Y sadeleşir.

$$0.4Y=240 \rightarrow Y^*=240/0.4=600$$

Factor Y and divide by 0.4.

Kalan katsayı 1−0,6=0,4.

$$C^*=40+0.6(600)=40+360=400$$

Find consumption and its parts.

40 otonom, 360 gelire bağlı tüketim.

$$400+80+120=600;\ k=1/0.4=2.5$$

Verify expenditure and calculate the multiplier.

İki başlangıç koşulu da sağlandı; çarpan boyutsuzdur.

Model English interpretation

Income is 600 and consumption 400. Of consumption, 40 is autonomous and 360 induced. A one-unit autonomous spending change produces a 2.5-unit equilibrium income change if b and other autonomous components stay fixed.

Türkçe reasoning

Y*=600, C*=400. Çarpan 2,5 “gelirin 2,5 katı tüketilir” demek değildir; bir otonom harcama değişimi ile denge gelir değişimi arasındaki oranı anlatır.

Check your explanation

☐ Distinguishes income from consumption and uses the same period/units.

☐ Separates autonomous 40 from induced 360 consumption.

☐ Interprets k as an equilibrium change ratio with b fixed, not a consumption share.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-02-S2 Solution

$Y=60+0.75Y+100+160=320+0.75Y$

Write the new equilibrium.

Yalnız G_0 değişti; tüketim eğilimini değiştirme.

$Y-0.75Y=320 \rightarrow 0.25Y=320$

Subtract 0.75Y and factor.

Aynı yasal cebir adımları yeni otonom toplam için kullanılır.

$Y_1^*=320/0.25=1280$

Divide by the positive coefficient.

Gelir eski 1200’den 1280’e çıkar.

$C_1^*=60+0.75(1280)=60+960=1020$

Use the unchanged consumption function.

Tüketim eski 960’dan 1020’ye çıkar.

$\Delta Y = 1280 - 1200 = 80;\ \Delta C = 1020 - 960 = 60$

Subtract old equilibrium values.

Δ yeni eksi eski demektir; yeni düzeylerle değişimleri karıştırma.

$\Delta Y = \Delta C + \Delta G_0 = 60 + 20 = 80;\ 1020 + 100 + 160 = 1280$

Check both the changes and the new levels.

80'in 60'ı uyarılmış tüketim artışı,20'si ilk kamu harcaması artışıdır.

Model English interpretation

The 20-unit government-spending increase is accompanied by 60 more units of consumption, so total equilibrium income rises by 80. The unchanged MPC makes the change formula valid.

Türkçe reasoning

İlk harcama 20 ile son gelir artışı 80 farklıdır. Gelirin tüketimi artırma bağlantısı yeni dengeye dahildir. Bu açıklama, belirli bir zaman hızı veya kaç dönemde gerçekleşeceği iddiası taşımaz.

Check your explanation

☐ States $\Delta G_0 = 20$, $\Delta C = 60$ and $\Delta Y = 80$.

☐ Checks the spending-change identity $80 = 60 + 20$.

☐ Keeps b, C_0, I_0 fixed and does not claim a guaranteed adjustment speed.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-02-S3 Solution

$Y = 60 + Y + 100 + 140 = 300 + Y$

Substitute b=1 in the original model.

Standart $0<b<1$ varsayımının dışına çıktığımızı açıkça not et.

$Y - Y = 300 + Y - Y \rightarrow 0 = 300$

Subtract Y from both sides.

Bu çelişkiyi hiçbir sonlu Y düzeltemez.

No finite equilibrium; 300/(1−1) is undefined

Reject division by zero, not just a large answer.

Sıfıra bölme bir sayı üretmez; “sonsuz denge” sonucu bu eşitliklerden çıkmaz.

If $C_0=I_0=G_0=0$ and b=1: C=Y and Y=C → 0=0

Check the special zero-autonomous case separately.

Çelişki yerine özdeşlik gelir; eşitlik tek bir gelir seçemez.

Every nonnegative Y with C=Y satisfies that special case

Conclude infinitely many feasible pairs, not one infinite value.

Çok sayıda sonlu çözüm olması ile sonsuz büyüklükte tek çözüm aynı şey değildir.

Model English interpretation

The standard multiplier requires $1-b\neq 0$. At b=1, positive autonomous spending makes the equations inconsistent. If autonomous spending is zero instead, the equations are dependent and do not select a unique income.

Türkçe reasoning

Formülün koşulu modelin mantığının parçasıdır. Pozitif otonom toplamla b=1 çelişki; sıfır toplamla b=1 tek dengeyi belirlemeyen bir sistem verir. “b, 1’e yakınken büyük çarpan” ile “b = 1 iken bölme” aynı işlem değildir.

Check your explanation

☐ Recognizes that b=1 violates the standard 0<b<1 assumption.

☐ Uses 0=300 to establish no finite equilibrium for positive autonomous spending.

☐ Uses 0=0 to explain non-uniqueness when all autonomous spending is zero.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-02-C1 Answer A

Y and C must satisfy both equations. C_0, I_0, G_0 and b are given within a scenario.

Y ve C modelin sonuçlarıdır. C_0, I_0, G_0, b ise bir senaryoda dışarıdan verilir. Dışsal bir değeri değiştirmek yeni senaryodur.

If you chose differently: Ask which symbols remain unknown after the parameters and autonomous spending are supplied.

Hangi sayılar verilmiş, hangi iki sonucu bulmak istiyoruz? Tüketimin hem harcama denkleminde hem davranış denkleminde yer aldığını fark et.

ME-02-C2 Answer B

ΔY=20/(1−0.75)=80 and ΔC=0.75×80=60. Check: 80=60+20.

Payda 0,25; 20/0,25=80. Tüketim 60 artar. Harcama artışı 60+20=80 olduğundan iki denklem birlikte sağlanır.

If you chose differently: The income change must equal the consumption change plus 20, and consumption changes by 0.75 of income.

ΔY=ΔC +20 ile ΔC=0,75ΔY'yi aynı anda sağlamayan seçenek denge karşılaştırması olamaz.

ME-02-C3 Answer B

Factor Y first: Y−bY=(1−b)Y. The coefficient is strictly positive, so division is legal.

Y'nin katsayısı 1'dir: 1 Y −bY=(1−b)Y. 0<b<1 olduğundan 1−b sıfır değildir.

If you chose differently: Identify the common factor and the condition on the proposed divisor.

Y −bY ifadesini Y(1−b) biçiminde yaz; sonra b=1 olsa ne olacağını düşün.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I distinguish endogenous income/consumption from autonomous components.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I derive Y* and C* and verify both original equations.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I derive the fixed-b change formula and explain $1-b$.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I reject division by zero and distinguish inconsistency from non-uniqueness.

Formülü kapatınca $Y-bY=(1-b)Y$ adımını, tüketimde ortak paydayı ve ΔY çarpanını nedenleriyle kurabiliyor muyum? b sabit değilse veya b = 1 ise neyin değişeceğini açıklayabiliyor muyum? Yardımla yaptığım çözümü yardımsız tekrar etmeden “kendim çözdüm” diye işaretlemem.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Directly verified PDF pp.5-7: Keynesian $Y=C+I_0+G_0$, $C=C_0+bY$, $0<b<1$; reduced forms for Y* and C*; fixed-b ΔY formula and G-only multipliers b=.5/.75. Source numeric check $C_0=100, I_0=150, G_0=250, b=.5$ gives $Y^*=1000, C^*=600$. W1/S1-S3 are original. Geometric-series intuition and b=1 diagnostic are clearly supplemental explanations; no tax or two-country model is introduced here. This is a source-based unit, not an official syllabus.

ME-03 Two-Commodity Market Model

Source PDF pages 8-12 (first half of p.12)

Build two market-clearing equations, solve them jointly, and explain cross-price effects without confusing them with own-price movements.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

One market is no longer isolated

The quantity demanded or supplied of each good may depend on **both prices**. A joint equilibrium requires $Qd_1=Qs_1$ and $Qd_2=Qs_2$ at the **same price pair** (P_1,P_2).

$$Qd_1 = a_0+a_1P_1+a_2P_2$$
$$Qs_1 = b_0+b_1P_1+b_2P_2$$
$$Qd_2 = \alpha_0+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2$$
$$Qs_2 = \beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
P_1,P_2	Prices of goods 1 and 2	Birinci ve ikinci malın fiyatları
Qd_i,Qs_i	Planned demand and supply of good i	i malının talep/arz miktarları
a_0,b_0,α_0,β_0	Intercept parameters	Sabit terimler / kesişim parametreleri
$a_1,a_2,b_1,b_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$	Price-response coefficients	Fiyatlara tepki katsayıları

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
α,β	Greek alpha and beta, coefficient labels	Alfa ve beta; yeni fiyat değişkenleri değil
c_i,g_i	Differences between demand and supply coefficients	Talep eksi arz katsayıları
D	$c_1g_2-c_2g_1$, a uniqueness check	Tek çözüm için kontrol edilen katsayı birleşimi

Türkçe explanation

Subscripts identify roles

In Qd_1, d means demand and 1 identifies the good. In a_2P_2, the 2 identifies the price whose coefficient is being used. All coefficients are fixed within one scenario.

Türkçe explanation

Normalize notation, not economic meaning

The source groups coefficient differences into c_0,c_1,c_2 and a second family written here as g_0,g_1,g_2. These are abbreviations, not additional assumptions or new unknowns.

$c_i = a_i-b_i;\ g_i = \alpha_i-\beta_i \quad \text{for } i=0,1,2$

Türkçe explanation

Own price and the other good’s price answer different questions

For good 1, $a_1<0$ is the usual downward own-price demand effect. Holding P_1 fixed, $a_2>0$ means that a higher P_2 raises demand for good 1: a substitute effect. If $a_2<0$, the cross-price effect is complementary.

Holding P_1 fixed: $\Delta Qd_1 = a_2\Delta P_2$

Türkçe explanation

Repeat the logic for good 2

In the second demand equation, α_2 is the own-price coefficient and α_1 is the cross-price coefficient. Thus $\alpha_2<0$ is the usual own-price sign; $\alpha_1>0$ indicates a positive substitute effect from P_1 to demand for good 2.

Holding P_2 fixed: $\Delta Qd_2 = \alpha_1\Delta P_1$

Türkçe explanation

An initial disturbance can reach the other market

If demand for good 1 shifts, P_1 may change. That price change enters good 2’s demand or supply equation, so the second equilibrium price generally must be recomputed. A price held fixed for interpreting a coefficient is not necessarily fixed in the final joint equilibrium.

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-03-C1

Which conditions define joint equilibrium?

A. $P_1=P_2$ and $Q_1=Q_2$

B. $Qd_1=Qs_1$ and $Qd_2=Qs_2$ at the same price pair

C. $Qd_1=Qs_2$ only

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-03-C2

In $Qd_1=16-2P_1+P_2$, what happens when only P_2 rises by 1?

A. It falls by 2

B. It rises by 1, a positive cross-price effect

C. P_1 must instantly rise by 1

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-03-C3

If $c_1=0$ but $D=c_1g_2-c_2g_1\neq0$, what follows?

A. The entire system has no solution

B. The first substitution route fails, but another elimination route gives a unique solution

C. We may divide by c_1 anyway

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Source model reduction - PDF pp.10-11

Turn the two demand-supply equalities into two linear equations in prices.

$a_0+a_1P_1+a_2P_2 = b_0+b_1P_1+b_2P_2$

Clear market 1.

$a_0+a_1P_1+a_2P_2-b_0-b_1P_1-b_2P_2=0$

Subtract the complete supply expression from both sides.

$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)P_1+(a_2-b_2)P_2=0$

Group constants and like price terms.

$c_0+c_1P_1+c_2P_2=0$

Define $c_0=a_0-b_0$, $c_1=a_1-b_1$, $c_2=a_2-b_2$.

$\alpha_0+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2 = \beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2$

Clear market 2.

$(\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)P_2=0$

Subtract market 2 supply and collect terms.

$g_0+g_1P_1+g_2P_2=0$

Define $g_i=\alpha_i-\beta_i$.

Detailed Turkish reasoning

Source substitution, with every divisor checked - PDF pp.11-12

This particular substitution starts by dividing by c_1, so it requires $c_1\neq0$. The final price denominator must also be nonzero.

$c_0+c_1P_1+c_2P_2=0$

Start with the first reduced equation.

$c_1P_1=-c_0-c_2P_2$

Subtract c_0 and c_2P_2 from both sides.

$P_1=-c_0/c_1-(c_2/c_1)P_2 \quad (c_1\neq0)$

Divide every term by c_1.

$g_0+g_1[-c_0/c_1-(c_2/c_1)P_2]+g_2P_2=0$

Substitute this expression for P_1 in equation 2.

$g_0-g_1c_0/c_1-(g_1c_2/c_1)P_2+g_2P_2=0$

Distribute g_1.

$g_0-g_1c_0/c_1+[g_2-g_1c_2/c_1]P_2=0$

Factor P_2 from its two terms.

$g_0-g_1c_0/c_1=[g_1c_2/c_1-g_2]P_2$

Subtract the P_2 term, reversing the coefficient's sign.

$P_2^*=[g_0-g_1c_0/c_1]/[g_1c_2/c_1-g_2]$

Divide by the bracketed coefficient, if nonzero.

$P_2^*=(c_1g_0-g_1c_0)/(g_1c_2-c_1g_2)$

Multiply numerator and denominator by nonzero c_1.

$$D=c_1g_2-c_2g_1;\ P_2^*=(c_0g_1-c_1g_0)/D$$

Multiply numerator and denominator by -1.

Detailed Turkish reasoning

Complete the omitted P_1 result without dividing by c_1

The source asks for P_1^*. Elimination supplies the result and makes clear why $D\neq0$ is the joint uniqueness condition.

$$c_1P_1+c_2P_2=-c_0;\ g_1P_1+g_2P_2=-g_0$$

Put constants on the right.

$$g_2c_1P_1+g_2c_2P_2=-g_2c_0$$

Multiply the first equation by g_2.

$$c_2g_1P_1+c_2g_2P_2=-c_2g_0$$

Multiply the second equation by c_2.

$$(c_1g_2-c_2g_1)P_1=-c_0g_2+c_2g_0$$

Subtract the second multiplied equation from the first.

$$P_1^*=(c_2g_0-c_0g_2)/D\quad(D\neq0)$$

Divide by D.

$$P_2^*=(c_0g_1-c_1g_0)/D$$

Obtain the matching P_2 formula by eliminating P_1.

$$Q_1^*=a_0+a_1P_1^*+a_2P_2^*=b_0+b_1P_1^*+b_2P_2^*$$

Recover and verify quantity in market 1.

$$Q_2^*=\alpha_0+\alpha_1P_1^*+\alpha_2P_2^*=\beta_0+\beta_1P_1^*+\beta_2P_2^*$$

Recover quantity in market 2 and check feasibility.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

The source develops the symbolic model for this unit without a separate numerical example. Its full source derivation is in the preceding section. The next worked example uses fresh numbers.

Worked example

ME-03-W1 Two substitute-linked goods

Let $Qd_1=16-2P_1+P_2$, $Qs_1=2+P_1$, $Qd_2=9+P_1-2P_2$ and $Qs_2=3+P_2$. Derive both equilibrium prices and quantities. Verify all four schedules and explain the positive cross-price coefficients without claiming that the prices must be equal.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$16-2P_1+P_2=2+P_1$

Clear market 1.

$16-2=P_1+2P_1-P_2 \rightarrow 14=3P_1-P_2$

Subtract 2 and add $2P_1-P_2$ to both sides.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$9+P_1-2P_2=3+P_2 \rightarrow 6=-P_1+3P_2$

Clear market 2 and collect its price terms.

$P_2=3P_1-14$

Solve the first equation for P_2.

$6=-P_1+3(3P_1-14)$

Substitute P_2 into the second equation.

$6 = -P_1 + 9P_1 - 42 = 8P_1 - 42$

Distribute and collect like terms.

$48 = 8P_1 \rightarrow P_1^* = 6$

Add 42 and divide by 8.

$P_2^* = 3(6) - 14 = 4$

Return to the substitution expression.

$Qd_1 = 16 - 12 + 4 = 8$; $Qs_1 = 2 + 6 = 8$

Verify market 1 quantity.

$Qd_2 = 9 + 6 - 8 = 7$; $Qs_2 = 3 + 4 = 7$

Verify market 2 quantity.

Interpret before reading the model answer

Explain the result, its verification and its economic meaning or limits.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-03-S1 Rebuild with fresh intercepts

Solve $Qd_1=21-2P_1+P_2$, $Qs_1=2+P_1$, $Qd_2=10+P_1-2P_2$ and $Qs_2=3+P_2$. Derive P_1^*,P_2^*,Q_1^*,Q_2^*, verify all schedules, and write a short economic interpretation.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-03-S1 Interpretation and verification

Write an exam answer assigning each price and quantity to its own market. Explain why $Q_1 \neq Q_2$ does not contradict equilibrium.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-03-S2 A demand shift spills into the other market

Start from ME-03-W1 and raise only the first demand intercept from 16 to 24. All other coefficients stay fixed. Find the new prices and quantities, calculate each change, and explain why market 2 changes although its own equation parameters do not. Also calculate excess demand in market 1 at the old price pair.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-03-S2 Interpretation and verification

Write an exam answer distinguishing the initial demand shift, the cross-price effect on good 2, and movements along unchanged supply schedules. State what is held fixed.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-03-S3 Two individually readable equations may conflict

A proposed two-market model reduces to $3P_1 - P_2 = 14$ and $6P_1 - 2P_2 = 30$. Does a joint equilibrium price pair exist? Then replace 30 by 28: does the revised system choose a unique pair? Explain what the reduced equations alone can and cannot tell you about positive traded quantities.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-03-S3 Interpretation and verification

Give an exam answer distinguishing inconsistency, non-uniqueness and economic feasibility. Do not call every zero denominator “no equilibrium.”

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

One market is no longer isolated

İlk ünitede tek malın fiyatı vardı. Şimdi birinci malın miktarı ikinci malın fiyatından da etkilenebilir. Bir piyasayı çözüp diğer fiyatı rastgele bırakmak yeterli değildir.

İki piyasa temizlenme koşulu aynı (P_1, P_2) çifti için sağlanmalıdır. P_1 ile P_2 birbirine eşit olmak zorunda değil; farklı malların fiyatlarıdır. Eşitlediğimiz, **her malın kendi arz ve talep miktarıdır**. Q_1 ile Q_2'yi de birbirine eşitlemiyoruz.

$$Qd_1 = a_0+a_1P_1+a_2P_2$$
$$Qs_1 = b_0+b_1P_1+b_2P_2$$
$$Qd_2 = \alpha_0+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2$$
$$Qs_2 = \beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2$$

Back to English

Subscripts identify roles

Qd_1'deki d ve 1 çarpılan sayılar değil, etiketlerdir. a_2 ise birinci malın talebindeki P_2 katsayısıdır. α_2 de P_2 katsayısıdır ama ikinci malın talep denklemindedir. Bu yüzden a_2 ile α_2 aynı ekonomik rolü oynamaz.

Fiyatların ve her malın miktarlarının birimleri tutarlı olmalıdır. a_2'nin birimi "birinci mal miktarı / ikinci mal fiyatı"dır; α_1'in birimi "ikinci mal miktarı / birinci mal fiyatı"dır. İki malın miktarları farklı fiziksel birimlerde olabilir; yalnız aynı malın arzı ve talebi aynı dönemde aynı birimle karşılaştırılır.

Back to English

Normalize notation, not economic meaning

Kaynak s.10-12, uzun denklemleri katsayı farklarıyla kısaltır. İkinci ailenin el yazısı sembolünü okunabilirlik için **g** ile gösteriyoruz: $g_i=\alpha_i-\beta_i$. İlk aile $c_i=a_i-b_i$'dir. Bu c, önceki tek-piyasa modelindeki pozitif arz kesişimi büyüklüğüyle aynı parametre değildir; her modelin sembol sözlüğünü yeniden oku.

c_i ve g_i'nin tamamının pozitif olduğunu varsaymıyoruz. Birer katsayı farkı oldukları için işaretleri verilerden çıkar.

$c_i = a_i - b_i$; $g_i = \alpha_i - \beta_i$ for i=0,1,2

Back to English

Own price and the other good’s price answer different questions

Kendi fiyat etkisi: P_2 sabitken P_1 bir artarsa Qd_1, a_1 kadar değişir. a_1 negatifse aynı talep ilişkisi üzerinde talep edilen miktar düşer.

Çapraz fiyat etkisi: P_1 sabitken P_2 bir artarsa Qd_1, a_2 kadar değişir. a_2 pozitifse ikinci mal pahalanınca birinci mala yönelme vardır: bu doğrusal talep fonksiyonunda ikame etkisi. a_2 negatifse birlikte kullanılan mallardaki tamamlayıcılık yönünü gösterir.

$a_1<0$ tek başına “ikame” demek değildir; ikame/tamamlayıcılık yorumunu **çapraz fiyat katsayısının işareti** verir. Kaynaktaki işaret notunu bu ayrımla okumalıyız.

Holding P_1 fixed: $\Delta Qd_1 = a_2 \Delta P_2$

Back to English

Repeat the logic for good 2

İndis değişince ekonomik görev de değişir. İkinci malın kendi fiyatı P_2 olduğundan kendi fiyat katsayısı α_2’dir. Diğer malın fiyatı P_1 olduğundan çapraz katsayı α_1’dir.

$\alpha_1<0$ tamamlayıcı yönü; $\alpha_1=0$ bu doğrusal denklemde çapraz fiyat etkisi olmadığını gösterir. Kaynak her iki talep fonksiyonundaki işaretleri ayrı yazar. Burada teorik olarak $a_2=\alpha_1$ eşitliği dayatmıyoruz; malların birimleri ve tepkileri farklı olabilir.

Holding P_2 fixed: $\Delta Qd_2 = \alpha_1 \Delta P_1$

Back to English

An initial disturbance can reach the other market

Bir katsayının anlamını anlatırken “diğer fiyat sabit” deriz. Fakat bütün sistemin yeni dengesini çözerken fiyatları içsel olarak birlikte belirleriz. Bu iki işlem farklıdır.

Örnekte birinci malın talep kesişimi artacak. İlk anda eski fiyat çiftinde birinci piyasada talep fazlası doğar; yeni ortak dengeyi hesaplarken ikinci fiyat da değişir. Bu bir karşılaştırmalı statik yorumdur, fiyatların hangi hızla veya hangi sırayla uyum sağladığının kanıtı değildir.

Back to English

ME-03-C1 Question support

İki mal için ortak dengeyi hangi eşitlikler tanımlar?

Return to foundations

ME-03-C2 Question support

P_1 sabitken P_2 bir artarsa birinci malın talep edilen miktarı nasıl değişir?

Return to foundations

ME-03-C3 Question support

c_1 sıfır fakat D sıfır değilse nasıl düşünmeliyiz?

Return to foundations

Source model reduction - PDF pp.10-11

Kaynağın kısaltmalarını tek tek kur; bir katsayının nereden geldiği kaybolmasın.

$$a_0+a_1P_1+a_2P_2 = b_0+b_1P_1+b_2P_2$$

Birinci malın talep ve arzını aynı P_1, P_2 değerlerinde eşitle.

$$a_0+a_1P_1+a_2P_2-b_0-b_1P_1-b_2P_2=0$$

Sağdaki üç terimin tümünü çıkar; eksi işareti bütün terimlere dağılır.

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)P_1+(a_2-b_2)P_2=0$$

P_1 içerenleri ve P_2 içerenleri ayrı ayrı ortak çarpanına ayır.

$$c_0+c_1P_1+c_2P_2=0$$

Bu yeni denklem aynı eşitliğin daha kısa yazımıdır.

$$\alpha_0+\alpha_1P_1+\alpha_2P_2 = \beta_0+\beta_1P_1+\beta_2P_2$$

İkinci malın kendi arz-talep koşulunu kur.

$$(\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)P_1+(\alpha_2-\beta_2)P_2=0$$

Aynı işlem ikinci piyasaya uygulanır; α ve β katsayılarını a, b ile karıştırma.

$$g_0+g_1P_1+g_2P_2=0$$

Artık iki bilinmeyen fiyat ve iki doğrusal denklem var.

Back to English

Source substitution, with every divisor checked - PDF pp.11-12

Kaynakta kullanılan yerine koyma yolu için $c_1 \neq 0$ gerekir. Ara bölmelerin koşulunu yazmadan formülü kullanma.

$c_0 + c_1P_1 + c_2P_2 = 0$

Önce P_1'i yalnız bırakacağız.

$c_1P_1 = -c_0 - c_2P_2$

Sadece işaret atlatmıyoruz; iki tarafa aynı iki çıkarma uygulanıyor.

$P_1 = -c_0/c_1 - (c_2/c_1)P_2 \quad (c_1 \neq 0)$

Sağdaki iki terim de c_1'e bölünür. c_1 sıfırsa bu adım kullanılmaz.

$g_0 + g_1[-c_0/c_1 - (c_2/c_1)P_2] + g_2P_2 = 0$

P_1'in tamamını parantez içinde yerine koy; g_1 her iki terimi çarpar.

$g_0 - g_1c_0/c_1 - (g_1c_2/c_1)P_2 + g_2P_2 = 0$

İki eksi terimin işaretlerini koru.

$g_0 - g_1c_0/c_1 + [g_2 - g_1c_2/c_1]P_2 = 0$

P_2'nin katsayısı $g_2 - g_1c_2/c_1$ olur.

$g_0 - g_1c_0/c_1 = [g_1c_2/c_1 - g_2]P_2$

İki yandan $[g_2 - g_1c_2/c_1]P_2$ çıkarınca karşıt katsayı elde edilir.

$P_2^* = [g_0 - g_1c_0/c_1]/[g_1c_2/c_1 - g_2]$

Bu, kaynak s.12'deki kesirli biçimdir. Paydanın sıfır olmadığını ayrıca kontrol et.

$P_2^* = (c_1g_0 - g_1c_0)/(g_1c_2 - c_1g_2)$

Pay ve paydayı aynı sıfırdan farklı sayıyla çarpmak kesri değiştirmez; iç kesirler kaybolur.

$D = c_1g_2 - c_2g_1$; $P_2^* = (c_0g_1 - c_1g_0)/D$

Standartlaştırılmış D işaretini kullandık. Payın işaretini değiştirmeden yalnız paydayı değiştirmek yanlış olur.

Back to English

Complete the omitted P_1 result without dividing by c_1

Kaynak s.12'de P_1^* soru olarak bırakılmış. İkinci fiyatı tamamlamakla yetinmeyelim; P_1 formülünü de gerekçesiyle türetelim.

$c_1P_1+c_2P_2=-c_0$; $g_1P_1+g_2P_2=-g_0$

Her denklemden sabit terimi çıkar.

$g_2c_1P_1+g_2c_2P_2=-g_2c_0$

Amaç P_2 katsayılarını eşitlemek.

$c_2g_1P_1+c_2g_2P_2=-c_2g_0$

İki çarpma da eşitliğin iki yanında uygulanır.

$(c_1g_2-c_2g_1)P_1=-c_0g_2+c_2g_0$

P_2 terimleri $g_2c_2-c_2g_2=0$ olur; sağdaki çıkarma eksi işaretine dikkat gerektirir.

$P_1^*=(c_2g_0-c_0g_2)/D \quad (D\neq 0)$

Bu yolda c_1'e bölmedik. $D\neq 0$ tek çözüm için yeterlidir; D sıfırsa formül yerine denklem tutarlılığını incelemek gerekir.

$P_2^*=(c_0g_1-c_1g_0)/D$

İlk denklemi g_1, ikinciyi c_1 ile çarpıp uygun yönde çıkarınca aynı D'li sonuç gelir.

$Q_1^*=a_0+a_1P_1^*+a_2P_2^*=b_0+b_1P_1^*+b_2P_2^*$

Fiyat çifti tek başına tam ekonomik cevap değildir; miktarı her iki orijinal denklemde hesapla.

$Q_2^*=\alpha_0+\alpha_1P_1^*+\alpha_2P_2^*=\beta_0+\beta_1P_1^*+\beta_2P_2^*$

P_1, P_2, Q_1, Q_2 için ekonomik alanı denetle. $D\neq 0$ tek cebirsel fiyat çifti demektir; otomatik pozitiflik veya dinamik istikrar demek değildir.

Back to English

ME-03-W1 Worked example support

Verilen dört fonksiyondan iki denge fiyatını ve miktarını bul. Dördünde de yerine koyarak kontrol et. Pozitif çapraz fiyat katsayılarının anlamını açıkla; iki malın fiyatlarını birbirine eşitleme.

$16-2P_1+P_2=2+P_1$

Birinci malın talebini kendi arzına eşitledik.

$16-2=P_1+2P_1-P_2 \rightarrow 14=3P_1-P_2$

Sabitler 14; fiyatların katsayıları 3 ve −1.

$9+P_1-2P_2=3+P_2 \rightarrow 6=-P_1+3P_2$

İkinci denkleme göre 3 P_2,$6+P_1$'e eşit olmalı.

$P_2=3P_1-14$

$14=3\ P_1-P_2$; iki yana P_2 ekleyip 14 çıkar.

$6=-P_1+3(3P_1-14)$

3 katsayısını parantezin tamamına uygula.

$6=-P_1+9P_1-42=8P_1-42$

$-P_1+9\ P_1=8\ P_1$;$3\times14=42$.

$48=8P_1 \rightarrow P_1^*=6$

İlk denge fiyatı 6 bulunur.

$P_2^*=3(6)-14=4$

İkinci fiyat 4; ilk fiyatla aynı olmak zorunda değil.

$Qd_1=16-12+4=8$; $Qs_1=2+6=8$

Birinci mal için iki plan da 8.

$Qd_2=9+6-8=7$; $Qs_2=3+4=7$

İkinci mal için iki plan da 7; iki malın miktarlarını birbirine eşitlemek gerekmiyor.

Return to the worked example

ME-03-S1 Question support

Yeni dört fonksiyon için iki fiyatı ve iki miktarı türet; bütün başlangıç denklemlerinde kontrol edip ekonomik anlamını yaz.

Fiyat ve miktarları kendi piyasalarına bağlayan bir sınav cevabı yaz. Q_1 ile Q_2'nin farklı olmasının dengeyle neden çelişmediğini açıkla.

Return to the problem

ME-03-S2 Question support

W 1'de yalnız birinci talep kesişimini 16'dan 24'e yükselt. Yeni fiyat ve miktarları ve eskiye göre değişimleri bul. İkinci piyasanın parametreleri sabitken sonucunun neden değiştiğini açıkla; eski fiyat çiftinde birinci piyasa talep fazlasını da bul.

İlk talep kaymasını, ikinci mala çapraz fiyat etkisini ve sabit arz doğrularındaki hareketleri ayıran bir sınav cevabı yaz; sabit tutulanları belirt.

Return to the problem

ME-03-S3 Question support

İndirgenmiş iki piyasa koşulu $3P_1 - P_2 = 14$ ve $6P_1 - 2P_2 = 30$ olsun. Ortak fiyat çifti var mı?30 yerine 28 yazarsak tek fiyat çifti seçilir mi? Yalnız indirgenmiş denklemlerden miktarların pozitifliği hakkında ne söylenebilir?

Çelişki, tek çözüm olmaması ve ekonomik geçerliliği ayıran bir sınav cevabı yaz. Her sıfır paydaya otomatik "denge yok" deme.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-03-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-03-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-03-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-03-S1

The clearing equations reduce to $3P_1-P_2=19$ and $-P_1+3P_2=7$. Solve them together, not one at a time with a guessed other price.

İlk denklemden $P_2=3\,P_1-19$ yaz ve ikinci denklemde tüm P_2 yerine koy.

Return and complete your attempt

ME-03-S2

The new first clearing equation is $3P_1-P_2=22$; the second remains $-P_1+3P_2=6$. Holding coefficients fixed does not hold endogenous prices fixed.

İkinci denklemin katsayıları aynı ama P_1 içsel bir değişken. İlk piyasadaki değişimden sonra yeni ortak fiyat çiftini tekrar çöz.

Return and complete your attempt

ME-03-S3

Multiply the first equation by 2 and compare it with the second. In the revised case, one equation duplicates the other.

İlk eşitliğin iki yanını 2 ile çarp. Aynı sol tarafın hem 28 hem 30 olması mümkün mü?

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-03-W1 Model interpretation

At prices $P_1=6$ and $P_2=4$, good 1 clears at 8 units and good 2 at 7 units in the specified period. Holding its own price fixed, demand for either good rises by one unit when the other good’s price rises by one: a positive substitute effect in each demand equation. These coefficient interpretations are not a claim of equal prices or guaranteed convergence.

Sınav cevabı fiyatları ve miktarları mal numarasıyla bağlamalı:1. mal 6 fiyatında 8 miktar,2. mal 4 fiyatında 7 miktar. Çapraz katsayılar +1 olduğundan kendi fiyat sabitken öteki malın pahalanması bu malın talep edilen miktarını artırır. Bu, katsayı yorumudur; denge fiyatının aynı anda ne kadar değişeceği sistemin tamamından çıkar.

ME-03-S1 Solution

$21-2P_1+P_2=2+P_1 \rightarrow 3P_1-P_2=19$

Clear market 1 and collect terms.

Her iki tarafta aynı terimleri çıkarıp ekleyerek sabiti 19 bul.

$10+P_1-2P_2=3+P_2 \rightarrow -P_1+3P_2=7$

Clear market 2.

İkinci sabit $10-3=7$.

$P_2=3P_1-19;\ -P_1+3(3P_1-19)=7$

Substitute the first equation into the second.

P_2 yerine tüm parantez geçer.

$-P_1+9P_1-57=7 \rightarrow 8P_1=64 \rightarrow P_1^*=8$

Distribute, add 57 and divide by 8.

Fiyatı tek bir denklemden tahmin etmedik; ikisini birlikte sağladık.

$P_2^*=3(8)-19=5$

Recover the second price.

Aynı fiyat çiftini bütün fonksiyonlarda kullan.

$Qd_1=21-16+5=10=2+8=Qs_1$

Verify good 1.

İlk miktar 10.

$Qd_2=10+8-10=8=3+5=Qs_2$

Verify good 2 and nonnegativity.

İkinci miktar 8; fiyatlar ve miktarlar pozitif.

Model English interpretation

Good 1 clears at price 8 and quantity 10, while good 2 clears at price 5 and quantity 8. The joint equilibrium conditions compare demand with supply within each market, so unequal quantities across the two goods are not a contradiction.

Türkçe reasoning

Denge demek bütün sayıların eşit olması değildir. Birinci malda $Qd_1=Qs_1=10$, ikinci malda $Qd_2=Qs_2=8$ olur. Malların fiziksel birimleri bile farklı olabilir; önemli olan aynı malın iki planının aynı fiyat çiftinde uyuşmasıdır.

Check your explanation

☐ Correctly pairs $(P_1,Q_1)=(8,10)$ and $(P_2,Q_2)=(5,8)$.

☐ States that each market’s demand equals its own supply.

☐ Does not require prices or quantities of different goods to be equal.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-03-S2 Solution

$24-2P_1+P_2=2+P_1 \rightarrow 3P_1-P_2=22$

Replace only the first demand intercept.

Arz fonksiyonlarını veya ikinci talep katsayılarını değiştirme.

$-P_1+3P_2=6;\ P_2=3P_1-22$

Keep market 2 clearing and isolate P_2 from market 1.

İkinci eşitlik hâlâ ortak fiyat çiftinde sağlanmalı.

$-P_1+3(3P_1-22)=6 \rightarrow 8P_1-66=6$

Substitute and distribute.

$-P_1+9\,P_1=8\,P_1$; sabit -66.

$8P_1=72 \rightarrow P_1^*=9;\ P_2^*=27-22=5$

Solve both prices.

Eski fiyatlar 6,4 idi; değişimler +3,+1.

$Qd_1=24-18+5=11=2+9=Qs_1$

Verify the new first-market quantity.

İlk miktar 8'den 11'e çıkar:$\Delta Q_1=3$.

$Qd_2=9+9-10=8=3+5=Qs_2$

Verify the new second-market quantity.

İkinci miktar 7'den 8'e çıkar:$\Delta Q_2=1$.

At old (6,4): $Qd_1=24-12+4=16$; $Qs_1=8$; excess demand=8

Distinguish the initial gap from the final quantity change.

Eski fiyat çiftinde talep fazlası 8; son denge miktarı artışı 3. Aynı büyüklük değiller.

$\Delta Qd_2=\Delta P_1-2\Delta P_2=3-2=1$

Explain the second-demand quantity change term by term.

İlk fiyatın 3 artması ikinci talebi +3 etkiler; kendi fiyatının 1 artması −2 etkiler; net +1.

Model English interpretation

The increase in good 1's demand intercept creates excess demand of 8 at the old prices. The new joint equilibrium is $(P_1,P_2)=(9,5)$ and $(Q_1,Q_2)=(11,8)$. Good 2 changes because the higher P_1 raises its demand at any fixed P_2; its own price then differs in the new equilibrium. Both supply schedules are unchanged, so their quantity changes are movements along the same schedules. This comparison holds all other coefficients fixed.

Türkçe reasoning

Birinci malın talep eğrisi sabit fiyat çiftinde 8 yukarı kayar; fakat son miktar yalnız 3 artar. İkinci malın talep fonksiyonundaki $+P_1$ kanalı bağlantıyı taşır. P_1'in 3 artması $+3$, P_2'nin 1 artması -2 etkiler; net miktar $+1$. Katsayıların değişmemesi içsel fiyatların değişmeyeceği anlamına gelmez. Statik karşılaştırma yaptığımız için kesin uyum süresi iddia etmiyoruz.

Check your explanation

☐ Identifies an 8-unit intercept increase at fixed prices, not an 8-unit final quantity increase.

☐ Reports $\Delta P_1=3$, $\Delta P_2=1$, $\Delta Q_1=3$ and $\Delta Q_2=1$.

☐ Explains good 2's net demand effect $3-2=1$ and unchanged supply parameters.

☐ States that this compares equilibria without proving an adjustment time path.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-03-S3 Solution

$2(3P_1-P_2)=2(14) \rightarrow 6P_1-2P_2=28$

Multiply equation 1 by 2.

İşlem aynı fiyat çiftinin sağlaması gereken eşitliği korur.

$6P_1-2P_2=30$ and $6P_1-2P_2=28 \rightarrow 0=2$

Subtract the equations.

Aynı ifade iki farklı sabite eşit olamaz; çelişki var.

Original system: no joint equilibrium price pair

Interpret inconsistency, not a negative-price result.

Sorun ekonomik alan değil, iki eşitliği aynı anda sağlayan hiçbir cebirsel çift olmaması.

If 30 becomes 28: equation 2 is exactly twice equation 1

Recognize a redundant condition.

İkinci denklem yeni bağımsız bilgi getirmiyor.

$P_2=3P_1-14$; any $P_1\geq 14/3$ gives nonnegative prices

Parameterize the revised price pairs and apply only the price domain.

Örneğin(5,1),(6,4) iki farklı negatif olmayan fiyat çiftidir. Fakat bu henüz miktar kontrolü değil.

Recover Qd_i and Qs_i from the original schedules before asserting positive trade

Separate price-equation consistency from quantity feasibility.

İndirgenmiş eşitlikler sadece arz-talep farklarını tutar. Orijinal fonksiyonlar verilmeden pozitif Q_1, Q_2 iddia edilemez.

Model English interpretation

The original market-clearing conditions are inconsistent, because they require the same price expression to equal both 28 and 30. The revised conditions are dependent and leave infinitely many price pairs rather than one unique pair. Nonnegative prices can be selected, but positive trade cannot be established without recovering quantities from the original demand and supply schedules.

Türkçe reasoning

İlk sistemde hiçbir fiyat çifti yok; ikinci sistemde çok sayıda fiyat çifti var. İkisi de tek çözüm formülünün kullanılamadığı durumlar olsa da nedenleri farklı. Bir fiyat çiftinin negatif olmaması da tek başına pozitif ticaret kanıtı değildir; ilgili malın orijinal arz/talep miktarını kontrol etmeliyiz.

Check your explanation

☐ Uses 0=2 to reject a joint price solution in the original system.

☐ Recognizes dependent equations and infinitely many price solutions in the revised system.

☐ Checks nonnegative prices separately and requires original schedules to assess quantities.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-03-C1 Answer B

Each good clears its own market. Different goods need not have equal prices or quantities.

Her malın talep ve arz planları kendi içinde eşitlenir; birinci malın talebini ikinci malın arzına eşitlemeyiz.

If you chose differently: Match each demand schedule to the supply schedule of the same good.

Alt indisleri oku: 1 birinci malı, 2 ikinci malı gösteriyor.

ME-03-C2 Answer B

The P_2 coefficient is +1. This is a conditional demand effect, not the complete equilibrium response.

P_2'nin katsayısı +1; dolayısıyla P_1 sabitken Qd_1 bir artar. Fakat yeni denge fiyatlarının ne olacağını iki denklem birlikte belirler.

If you chose differently: Identify the coefficient of the price that changes; keep the other price fixed for this question.

Sorulan fiyat P_2, P_1 değil. −2 kendi fiyat katsayısıdır.

ME-03-C3 Answer B

A chosen division can fail without the system failing. Reorder equations or eliminate without dividing by c_1.

c_1'e bölerek P_1'i yalnız bırakma yolu kullanılamaz. Bu, bütün sistemin çözümsüz olduğu anlamına gelmez. $D \neq 0$ başka bir yoldan tek çözümü sağlar.

If you chose differently: Separate a limitation of the chosen algebraic route from a property of the whole system.

"Bu sayıya bölemem" ile "sistem çözümsüz" aynı iddia değildir.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I pair each demand with supply for the same good.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I distinguish own-price and cross-price coefficients and state what is held fixed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I derive both prices with legal substitutions/eliminations.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I check all four schedules, feasibility and the economic meaning of changes.

İki malın fiyatlarını birbirine eşitlemeden denge kurabiliyor muyum? Katsayı işaretini yorumlarken hangi fiyatı sabit tuttuğumu söyleyebiliyor muyum? Bir ara bölme başarısız olunca sistemi otomatik çözümsüz sanmadan başka yolu düşünebiliyor muyum? Sayılardan sonra her mal için ekonomik yorum yazabiliyor muyum?

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

PDF pp.8-9: all four schedules, symbol definitions, endogenous prices/quantities, own- and cross-price demand signs. pp.10-11: the coefficient-difference reduction. First half p.12: substitution formula for P_2 and the nonzero-divisor condition, with P_1 left as a question. The module reproduces the generic source model and completes P_1 with a checked elimination derivation. g is a readable normalization of the second coefficient family, not an extra parameter. The source contains no fully numeric two-market example in this page range; W1/S1-S3 are original. D is introduced as a coefficient combination, not assumed prior determinant knowledge.

ME-04 Linear Systems & Matrix Representation

Source PDF pages 12-16 (second half of p.12 onward)

Translate linear equations into Ax=d, preserve variable and equation order, and interpret coefficients and solutions without assuming that matrix notation proves feasibility.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

Many equations, one organized statement

A system of m linear equations in n unknowns can be written as Ax=d. Each row of A belongs to an equation; each column belongs to a variable in a declared order. Writing the system compactly does not solve it yet.

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=d_i \quad \text{for } i=1,\ldots,m$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
m	Number of equations / rows	Denklem ve satır sayısı
n	Number of variables / columns	Bilinmeyen ve sütun sayısı
a_{ij}	Coefficient of variable j in equation i	i. denklemde j. değişkenin katsayısı
A	m×n coefficient matrix	m satır, n sütunlu katsayı matrisi
x	n×1 variable column vector	n bileşenli değişken sütun vektörü

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
d	m×1 constant column vector	m bileşenli sabit sütun vektörü
d_i	Right-hand side of equation i	i. denklemin sağındaki sabit

Türkçe explanation

What makes an equation linear?

Every unknown appears only to the first power, multiplied by a coefficient independent of the unknowns. Zero coefficients are allowed. Terms such as xy or x^2 make an equation nonlinear in those unknowns.

$x + 0y + 3z = 7 \quad \leftrightarrow \quad [1,0,3]$

Türkçe explanation

Read the indices before the number

The first index tells you the row, the second the column. The source's a_{43} is the coefficient of the third variable in the fourth equation. Matrix dimensions are always rows × columns.

$A: m \times n \quad ; \quad x: n \times 1 \quad ; \quad d: m \times 1$

Türkçe explanation

Why row-by-column multiplication reconstructs a model

The ith component of Ax is the sum of each coefficient in row i times its matching variable. This produces exactly the left side of equation i, not a new economic assumption.

$(Ax)_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$

Türkçe explanation

Two reorderings, two different obligations

Reordering equations changes the rows of A and the entries of d together. Reordering variables changes the columns of A and the entries of x together. Neither operation changes the underlying model if done consistently.

Türkçe explanation

Order matters; equality is not commutativity

The source notes that AB is not generally equal to BA when both are defined. For Ax, the order A then x is chosen to reconstruct the equations. A rectangular matrix is perfectly legitimate if the inner dimensions match.

$(m \times n)(n \times 1) \rightarrow m \times 1$

Türkçe explanation

Economic meaning comes from the model, not from the brackets

For production quantities, nonnegative outputs may be required. A mathematically valid solution with a negative component then fails that economic interpretation. For an abstract algebra problem, however, a negative variable is not automatically wrong.

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-04-C1

What does a_{43} identify?

A. Variable 4 in equation 3

B. Variable 3 in equation 4

C. The product 4×3

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-04-C2

For A with dimensions 3×2 and a two-variable column x, what is the dimension of Ax?

A. 2×3

B. 3×1

C. 2×1

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-04-C3

If x+3z=7 is written in the variable order (x,y,z), which coefficient row is correct?

A. [1,3]

B. [1,0,3]

C. [0,1,3]

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Build the general Ax=d representation - source pp.12-14

Separate coefficients, unknowns and constants while preserving every index.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=d_1$

Write equation 1 using the declared variable order.

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=d_2$

Use the same final variable x_n in equation 2.

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=d_m$

Continue through equation m.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$; $x=[x_1,\ldots,x_n]^T$; $d=[d_1,\ldots,d_m]^T$

Collect the three arrays.

$(Ax)_i=\Sigma_{j=1}^{n}\ a_{ij}x_j=d_i$

Expand row i against the variable column.

$Ax=d$: $(m\times n)(n\times 1)=m\times 1$

Check dimensions and equality component by component.

Detailed Turkish reasoning

A two-equation economic template

Use a resource-balance example to connect the matrix entries to quantities and units. This is original practice, not an additional source claim.

$r_{11}x+r_{12}y=R_1;\ r_{21}x+r_{22}y=R_2$

Let each equation describe full use of one resource.

$$A=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix};\ x\_vec=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\ d=\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Rows identify resources; columns identify products.

$Ax\_vec=d;\ x\geq 0,\ y\geq 0$

Add the domain needed for physical production.

Check each resource use after solving

Substitute outputs into both original balances.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Source example: equations into a matrix, then solve

The source gives $2x+3y+4z=5$, $-x-2y+3z=1$ and $x+y+z=0$. First reproduce its matrix representation. Then solve and verify, so the notation has a concrete meaning.

Source PDF pages 15

$2x+3y+4z=5;\ -x-2y+3z=1;\ x+y+z=0$

Keep the source equation order.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Place coefficients by columns x,y,z.

$A:3\times3$; $x\_vec:3\times1$; $d:3\times1$; $a_{23}=3$

Read the dimensions and an entry.

$x+y+z=0 \rightarrow x=-y-z$

Use the third equation to eliminate x.

$2(-y-z)+3y+4z=5 \rightarrow -2y-2z+3y+4z=5$

Substitute into the first equation and distribute.

$y+2z=5$

Collect y and z terms.

$-(-y-z)-2y+3z=1 \rightarrow y+z-2y+3z=1$

Substitute into equation 2; distribute the minus.

$-y+4z=1$

Collect terms in equation 2.

$(y+2z)+(-y+4z)=5+1 \rightarrow 6z=6 \rightarrow z=1$

Add the reduced equations, then divide by 6.

$y=5-2(1)=3$; $x=-3-1=-4$

Back-substitute to recover y and x.

$2(-4)+3(3)+4(1)=-8+9+4=5$

Verify equation 1.

$-(-4)-2(3)+3(1)=4-6+3=1$

Verify equation 2.

$-4+3+1=0$

Verify equation 3 and interpret cautiously.

Türkçe source-example reasoning

Source example: reorder equations and variables together

The next source page moves equation 3 first and uses the variable order (y,x,z). Track both reorderings rather than copying the old coefficient matrix.

Source PDF pages 15-16

New equation order: x+y+z=0; 2x+3y+4z=5; −x−2y+3z=1

Reorder equations and constants together.

New variable order: (y,x,z)

Declare the column meaning before entering coefficients.

Row 1: y+x+z=0 → [1,1,1]

Read the first new equation in the new order.

Row 2: 3y+2x+4z=5 → [3,2,4]

Place the coefficient of y before that of x.

Row 3: −2y−x+3z=1 → [−2,−1,3]

Preserve both signs when swapping columns.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Write the exact reordered representation.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verify using the solution in the new variable order.

Reordering is not a change in coefficients’ economic roles

Interpret the bookkeeping correctly.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-04-W1 Two products, two resources

Producing one unit of product x uses 2 units of resource 1 and 1 unit of resource 2. One unit of product y uses 1 unit of resource 1 and 3 units of resource 2. Available resources are 14 and 17 units. Assume both are fully used. Write Ax=d in the order (x,y), solve for nonnegative outputs, verify both resource balances and explain what this model does not optimize.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$2x+y=14;\ x+3y=17$

Translate each resource balance into one equation.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Write the coefficient matrix, output vector and resource vector.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$y=14-2x$

Subtract 2x from both sides of the first equation.

$x+3(14-2x)=17$

Substitute y into the second resource balance.

$x+42-6x=17 \rightarrow -5x+42=17$

Distribute 3 and combine like terms.

$-5x=17-42=-25 \rightarrow x=5$

Subtract 42 and divide by −5.

$y=14-2(5)=4$

Recover the second output.

$2(5)+4=14$; $5+3(4)=17$

Verify both full-use constraints.

Interpret before reading the model answer

Explain the result, its verification and its economic meaning or limits.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-04-S1 Build and verify another production system

Two products have resource-use matrix A=[[3,1],[1,2]] in the variable order (x,y). Both resources must be fully used, with d=[18,16]^{T}. Write the scalar equations, solve x and y, verify Ax=d, identify a_{21}, and explain the meaning of each row.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-04-S1 Interpretation and verification

Interpret your computed output plan in an exam paragraph. Explain a_{21} and distinguish full resource use from an optimization result.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-04-S2 Find the hidden change in variable order

In ME-04-W1, a student replaces the output vector $[x,y]^T$ with $[y,x]^T$ but leaves $A=[[2,1],[1,3]]$ unchanged. Explain the error. Write the correct reordered coefficient matrix, verify it at the original output plan, and explain whether reordering represents a technological change.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-04-S2 Interpretation and verification

Write an exam answer explaining why coefficients cannot be separated from variable labels. State what changes and what stays the same after a consistent reorder.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-04-S3 An algebraic solution can violate the production domain

Keep the technology from ME-04-W1 but change the fully used resource vector to $d=[40,17]^T$. Solve $2x+y=40$ and $x+3y=17$. Verify the algebra, then decide whether the result is a feasible nonnegative production plan. Explain why changing equality constraints to capacity inequalities would be a different model.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-04-S3 Interpretation and verification

Give an exam answer distinguishing algebraic validity, nonnegative-output feasibility and the full-use assumption. State why a new inequality model would need an objective to choose a preferred plan.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

Many equations, one organized statement

Matris, denklemleri kaybetmeden düzenleyen bir gösterimdir. Önce bilinmeyen sırasını seçeriz: x_1, x_2,..., x_n. Her denklemde bu sırayı koruyarak katsayıları yazarız. Böylece **satır=denklem, sütun=değişken** olur.

m denklem sayısı, n bilinmeyen sayısıdır; m=n olmak zorunda değildir. Ax=d yazabildiğimiz için otomatik tek çözüm var diyemeyiz. Çözümün varlığı, tekliği ve ekonomik anlamı daha sonra ayrıca kontrol edilir.

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=d_i \quad \text{for } i=1,\ldots,m$

Back to English

What makes an equation linear?

$2x+3y=5$ doğrusaldır; katsayılar 2 ve 3 sabittir. $2x+3y^2=5$ veya $xy=5$ aynı x, y bilinmeyenleri açısından doğrusal değildir. Sabit terimler bulunabilir; $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=d$ biçimi bunları sağ tarafta tutar.

Bir değişken denklemde görünmüyorsa katsayısı sıfırdır. Bu sütunu silmek yerine **0** yazmalıyız; aksi halde sonraki katsayı yanlış değişkenle eşleşir. Örneğin $x+3z=7$, (x, y, z) sırasında [1,0,3] satırıdır.

$x + 0y + 3z = 7 \quad \leftrightarrow \quad [1,0,3]$

Back to English

Read the indices before the number

a_{43} içindeki 4 ve 3 üs veya çarpılan sayılar değildir. Önce 4. denkleme, sonra 3. değişkenin katsayısına bakarız. a_{43} ile a_{34} aynı konum değildir.

Kaynakta değişken kümesi x_j için j=1,..., n; sabitler d_i için i=1,..., m olarak tanımlanır. x sütun vektörü n×1, d sütun vektörü m×1 olur. Bu ünitedeki d vektörü, ilk piyasa modelindeki skaler arz eğimi d ile karıştırılmamalıdır.

$A: m\times n \quad ; \quad x: n\times 1 \quad ; \quad d: m\times 1$

Back to English

Why row-by-column multiplication reconstructs a model

Bir satırdaki katsayıları değişken vektörünün aynı konumdaki bileşenleriyle çarpıp toplarız: $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n$. Bu yüzden matris çarpımı kaynak denklemini geri üretir.

Ekonomik modelde bir satır bir kaynak kısıtı, bir piyasa denge koşulu veya bir muhasebe bağıntısı olabilir. Katsayının ekonomik birimi de satırın anlamına bağlıdır. Sayıları yazmadan önce satır ve sütun etiketlerini zihninde koru.

$$(Ax)_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

Back to English

Two reorderings, two different obligations

Denklem sırası: Üçüncü denklemi en üste alırsan, katsayı satırı da sağ taraf sabiti de en üste gelmeli. Sadece A'yı taşıyıp d'yi yerinde bırakırsan başka denklemler yazarsın.

Değişken sırası: Vektörü (x, y, z) yerine (y, x, z) yaparsan ilk iki katsayı sütununu da değiştir. Sadece vektör etiketlerini değiştirmek x'in katsayısını y'ye bağlar ve ekonomik modeli bozabilir.

Kaynak s.15-16 her iki tür yeniden sıralamayı birlikte gösterir. Burada teknolojinin veya davranış parametrelerinin değişmesi değil, aynı modelin etiketli gösteriminin değişmesi söz konusudur.

Back to English

Order matters; equality is not commutativity

Genel A için "çarpanları yer değiştirsem aynı şey olur" diyemeyiz. Örneğin A 2×3 ve x 3×1 ise Ax, 2×1'dir; xA için iç boyutlar 1 ve 2 olduğundan bu çarpım tanımlı değildir.

"AB≠BA genel olarak" ifadesi, her özel matris çiftinde mutlaka eşitsizlik var demek değildir; bazı matrisler yer değiştirir. Bu ünitede bu notu doğru sınırla okuyoruz; ayrıntılı matris çarpma kuralları sonraki ünitede çalışılacak.

$$(m\times n)(n\times 1) \rightarrow m\times 1$$

Back to English

Economic meaning comes from the model, not from the brackets

Kaynak s.15'teki x, y, z'ye ekonomik etiket verilmemiştir; bu nedenle negatif x çıkması cebirsel hata değildir. Üretim örneğimizde ise x ve y fiziksel üretim miktarıdır, dolayısıyla negatif olmayan çözüm aranır.

Ayrıca bir kaynak modelinde bütün kaynakları **tam kullanma** koşulunu eşitliklerle yazmak bir varsayımdır. Kaynak kapasitelerini aşmamak istenseydi eşitsizlikler gerekirdi. Ax=d, tek başına kâr maksimizasyonu veya en iyi üretim planı iddiası değildir.

Back to English

ME-04-C1 Question support

a_{43} hangi konumdaki katsayıyı gösterir?

Return to foundations

ME-04-C2 Question support

A 3×2 ve x iki bileşenli sütun vektörü ise Ax'in boyutu nedir?

Return to foundations

ME-04-C3 Question support

Değişken sırası(x, y, z) iken x+3 z=7 hangi katsayı satırını verir?

Return to foundations

Build the general Ax=d representation - source pp.12-14

Aynı sistemin üç parçasını düzenle: katsayılar A, bilinmeyenler x, sağ taraf d.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=d_1$

Birinci satırda her bilinmeyenin katsayısı ilk indis 1'i taşır.

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=d_2$

İkinci denklemin son terimi genel n-değişkenli sistemde $a_{2n}x_n$ olmalıdır. El yazısındaki son değişken etiketi ne kadar sıkışık görünse de sütunların sırası tüm satırlarda aynıdır.

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=d_m$

m son denklem/satır; n son değişken/sütun indeksidir.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$; $x=[x_1,\dots,x_n]^T$; $d=[d_1,\dots,d_m]^T$

^{T} burada yatay yazdığımız listeyi sütun olarak okuma kısaltmasıdır; kaynak x ve d’yi zaten sütun vektörü şeklinde çizer.

$(Ax)_i=\Sigma_{j=1}^{n}\ a_{ij}x_j=d_i$

Σ toplama işaretidir: j 1’den n’ye giderken aynı satırdaki her katsayı uygun bilinmeyenle çarpılıp toplanır.

$Ax=d$: $(m\times n)(n\times 1)=m\times 1$

Sol çarpım ve sağ vektör aynı m×1 boyutundadır. Matris eşitliği her satırdaki denklem eşitliği anlamına gelir.

Back to English

A two-equation economic template

Kaynak gösterimini ekonomik bir örneğe bağlamak için iki üretim faaliyeti düşünelim.

$r_{11}x+r_{12}y=R_1$; $r_{21}x+r_{22}y=R_2$

x, y çıktı miktarları; r_{ij} i kaynağının j çıktısı başına kullanımını; R_i mevcut kaynak miktarını göstersin.

$$A=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix};\ x\_vec=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\ d=\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Birinci sütun x üretiminin, ikinci sütun y üretiminin kaynak ihtiyaçlarını listeler.

$Ax\_vec=d$; $x\geq 0$, $y\geq 0$

Negatif üretim miktarı kabul etmeyiz. Fakat eşitlik, bütün kaynakları tam kullandığımızı ayrıca varsayar.

Check each resource use after solving

Yalnız bir satırın tutması diğer kaynağın da tutacağını göstermez. Kısıtların ikisini ayrı denetle.

Back to English

Source example: equations into a matrix, then solve

Kaynakta verilen üç denklemi önce aynı(x, y, z) sırasıyla matrise dönüştürelim. Ardından örneği çözerek gösterimin neyi koruduğunu doğrulayalım.

Source PDF pages 15

$$2x+3y+4z=5;\ -x-2y+3z=1;\ x+y+z=0$$

Birinci, ikinci, üçüncü satır bu sırada olacak.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Birinci satır[2,3,4], ikinci[−1,−2,3], üçüncü[1,1,1]. Sabit vektörü$[5,1,0]^T$.

$$A:3\times3;\ x\_vec:3\times1;\ d:3\times1;\ a_{23}=3$$

a_{23} ikinci denklemde üçüncü değişken z'nin katsayısıdır:3.

$$x+y+z=0 \rightarrow x=-y-z$$

İki taraftan y ve z çıkar.

$$2(-y-z)+3y+4z=5 \rightarrow -2y-2z+3y+4z=5$$

2 katsayısı hem−y'yi hem−z'yi çarpar.

$$y+2z=5$$

$$-2\ y+3\ y=y;-2\ z+4\ z=2\ z.$$

$$-(-y-z)-2y+3z=1 \rightarrow y+z-2y+3z=1$$

$-(-y-z)=y+z$; burada iki işaret de değişir.

$$-y+4z=1$$

$$y-2\ y=-y;z+3\ z=4\ z.$$

$$(y+2z)+(-y+4z)=5+1 \rightarrow 6z=6 \rightarrow z=1$$

y terimleri birbirini götürür.

$y=5-2(1)=3$; $x=-3-1=-4$

Bir değişken bulmakla durma; üçü de belirlenmeli.

$2(-4)+3(3)+4(1)=-8+9+4=5$

İlk satırın sağ tarafı 5 elde edilir.

$-(-4)-2(3)+3(1)=4-6+3=1$

İkinci satırın sağ tarafı 1 elde edilir.

$-4+3+1=0$

Kaynak bu bilinmeyenlere ekonomik etiket vermiyor. $x=-4$ bu soyut cebir probleminde geçerli; ancak x fiziksel üretim miktarı denseydi negatiflik nedeniyle ekonomik alanı ayrıca tartışmak gerekirdi.

Back to English

Source example: reorder equations and variables together

Kaynak s.15'in son notu sonraki sayfada x'in ikinci, y'nin birinci değişken yeri alacağını söylüyor. s.16'da denklem sırası da üçüncü, birinci, ikinci olarak değişiyor.

Source PDF pages 15-16

New equation order: $x+y+z=0$; $2x+3y+4z=5$; $-x-2y+3z=1$

Sabitler artık 0,5,1 sırasındadır.

New variable order: (y,x,z)

İlk sütun y'ye, ikinci sütun x'e, üçüncü sütun z'ye bağlanacak.

Row 1: $y+x+z=0 \rightarrow [1,1,1]$

x ve y katsayıları eşit olduğu için bu satırdaki sütun değişimi görünmez; yine de mantık aynıdır.

Row 2: $3y+2x+4z=5 \rightarrow [3,2,4]$

Eski[2,3,4] satırını olduğu gibi kopyalarsan model değişir.

Row 3: $-2y-x+3z=1 \rightarrow [-2,-1,3]$

y'nin katsayısı-2, x'in katsayısı-1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu matris kaynak s.16 ile aynı katsayı ve sabit düzenindedir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektör artık$[y, x, z]=[3,-4,1]^T$. Çarpım 0,5,1 verir: aynı denklemlerin aynı çözümü.

Reordering is not a change in coefficients’ economic roles

Bir ekonomik modelde sadece gösterim sırası değişirse teknoloji, davranış ve denge değişmez. Etiketleri korumak, sayısal çözümün anlamını korur.

Back to English

ME-04-W1 Worked example support

x çıktısının bir birimi kaynak 1’den 2, kaynak 2’den 1 birim; y çıktısı kaynak 1’den 1, kaynak 2’den 3 birim kullanıyor. Kaynak miktarları 14 ve 17. İkisi tam kullanılsın. (x, y) sırasıyla Ax=d kur, çıktıları çöz, iki kaynağı kontrol et ve modelin neyi optimize etmediğini açıkla.

$2x+y=14;\ x+3y=17$

Birinci satır kaynak 1, ikinci satır kaynak 2. Katsayılar çıktı başına kaynak kullanımıdır.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Satırlar kaynakları, sütunlar ürünleri temsil eder.

$y=14-2x$

İlk kaynağın tam kullanımını sağlayan y miktarını x cinsinden yazdık.

$x+3(14-2x)=17$

Aynı üretim planının ikinci kaynağı da tam kullanması gerekiyor.

$x+42-6x=17 \rightarrow -5x+42=17$

$x-6\ x=-5\ x$; sağdaki 17 sabit.

$-5x=17-42=-25 \rightarrow x=5$

Negatif bir sayıya bölmek eşitliği bozmaz; sıfır olmaması yeterlidir.

$y=14-2(5)=4$

İki çıktı da negatif değil.

$2(5)+4=14$; $5+3(4)=17$

Kaynak 1 kullanımı 14, kaynak 2 kullanımı 17; kapasite vektörü tam karşılanır.

Return to the worked example

ME-04-S1 Question support

A=[[3,1],[1,2]], değişken sırası(x, y), kaynak vektörü[18,16]^{T}. İki kaynak tam kullanılsın. Skaler denklemleri yaz, x, y'yi bul, Ax=d'yi doğrula, a_{21}'i tanımla ve satırların ekonomik anlamını açıkla.

Bulduğun çıktı planını bir sınav paragrafıyla yorumla. a_{21}'i açıkla; tam kaynak kullanımı ile optimizasyon sonucunu ayır.

Return to the problem

ME-04-S2 Question support

W 1'de öğrenci[x, y]^{T} yerine[y, x]^{T} yazıyor ama A'yı aynı bırakıyor. Hatayı açıkla, doğru yeni matrisi yaz ve eski çıktı planıyla kontrol et. Sıralama değişiminin teknolojik değişim olup olmadığını yorumla.

Katsayıların değişken etiketlerinden neden ayrı düşünülemeyeceğini sınav diliyle açıkla. Tutarlı yeniden sıralamada neyin değişip neyin aynı kaldığını belirt.

Return to the problem

ME-04-S3 Question support

W 1’in teknolojisi aynı kalsın; tam kullanılan kaynaklar$[40,17]^{T}$ olsun. İki denklemi çöz ve cebiri kontrol et. Sonucun negatif olmayan üretim planı olup olmadığını açıkla. Tam kullanım eşitliklerini kapasite eşitsizliklerine çevirmenin neden farklı model olduğunu belirt.

Cebirsel doğruluk, negatif olmayan çıktı koşulu ve tam kullanım varsayımını ayıran bir sınav cevabı yaz. Yeni eşitsizlik modelinde tercih edilen planı seçmek için neden amaç gerektiğini belirt.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-04-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-04-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-04-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-04-S1

Expand rows first: 3x+y=18 and x+2y=16. A coefficient’s position determines its economic role.

İlk satırı(x, y) ile çarpıp topla. a_{21} ikinci kaynağın birinci ürün başına kullanımını gösterir.

Return and complete your attempt

ME-04-S2

A column belongs to a variable. When the variables swap places, the corresponding columns must swap too; the resource constants do not swap unless the equations do.

Birinci sütun artık y’ye aitse eski ikinci sütun oraya gelmeli. Yalnız değişken sırası değiştiği için kaynak sırası ve sabit vektörü aynı kalır.

Return and complete your attempt

ME-04-S3

Use y=40−2x. A negative output may be a model-domain problem even when both equations check correctly.

İlk denklemden y’yi yalnız bırakıp ikinciye koy. Sonucun işaretini değiştirmeye çalışma; önce iki denklemde doğrula.

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-04-W1 Model interpretation

The model’s full-use production plan is x=5 and y=4. The first row verifies resource 1 use, and the second verifies resource 2 use. Both outputs are nonnegative. The equations impose resource balances; without prices, revenues or an objective, they do not establish a profit-maximizing or welfare-maximizing plan.

Ekonomik cevap yalnız(5,4) değildir: hangi ürünün ne kadar üretildiği ve kaynak kullanımının hangi satırda kontrol edildiği söylenir. Tam kullanım varsayımı altında 5 birim x ve 4 birim y mümkündür. Fiyat veya amaç fonksiyonu verilmediği için buna “en kârlı plan” demeyiz.

ME-04-S1 Solution

$3x+y=18;\ x+2y=16$

Unpack the two matrix rows.

Katsayıları doğru değişkenlerle eşleştir.

$y=18-3x$

Isolate y in the first equation.

İki taraftan 3 x çıkar.

$x+2(18-3x)=16 \rightarrow x+36-6x=16$

Substitute into the second equation and distribute.

2 parantezin iki terimini de çarpar.

$-5x+36=16 \rightarrow -5x=-20 \rightarrow x=4$

Collect, subtract 36 and divide by −5.

Yasal işlemlerden sonra ilk çıktı 4.

$y=18-3(4)=6$

Recover y.

İkinci çıktı 6; alan koşulu sağlanıyor.

$3(4)+6=18; 4+2(6)=16;\ a_{21}=1$

Verify both resource uses and read the entry.

İkinci satır birinci sütundaki 1, kaynak 2'nin x çıktısı başına kullanımını anlatır.

Model English interpretation

The nonnegative full-use plan produces 4 units of x and 6 units of y. Resource 1 use is $3(4)+6=18$, while resource 2 use is $4+2(6)=16$. The entry $a_{21}=1$ means each unit of x requires one unit of resource 2. These balances establish consistency with the assumed full use, not profit maximization.

Türkçe reasoning

Sayıları çıktı adlarıyla bağla: x 4, y 6. Her satır farklı bir kaynağın kullanımını ölçer. a_{21}'de 2 kaynak/satır,1 ürün/sütun demektir. Amaç fonksiyonu olmadığından planın "en iyi" olduğunu söylemiyoruz.

Check your explanation

☐ Assigns outputs to x and y correctly.

☐ Explains row 1/resource 1 and row 2/resource 2 and verifies both balances.

☐ Interprets a_{21} as resource 2 usage per unit of product x.

☐ Does not claim profit maximization without an objective.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-04-S2 Solution

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ gives $2y+x$ and $y+3x$

Read what the incorrect representation actually says.

Bu ifadeler orijinal $2x+y$ ve $x+3y$'den farklıdır.

At $x=5, y=4$: $2y+x=13\neq 14$; $y+3x=19\neq 17$

Show the inconsistency caused by the label mismatch.

Aynı planı yanlış etiketli matrisle çarpmak kaynak kullanımlarını değiştirir.

Correct A_new= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Swap coefficient columns to match the order (y,x).

Eski y katsayıları 1 ve 3 artık ilk sütunda; x katsayıları 2 ve 1 ikinci sütunda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Verify using the reordered output vector.

1×4+2×5=14;3×4+1×5=17.

Same model, same outputs, different representation

Separate bookkeeping from a parameter change.

Kaynak kullanımı veya üretim teknolojisi değişmedi; yalnız gösterimde sütun ve bileşen sırası değişti.

Model English interpretation

A coefficient’s meaning depends on its column label. Swapping the variable order requires swapping the matching columns, so the correct matrix becomes [[1,2],[3,1]] with output vector $[y,x]^T$. The resource vector remains unchanged because the equation order has not changed. This is the same technology and production plan, not a new economic scenario.

Türkçe reasoning

Matris sadece sayı tablosu değildir; her sütun bir ürünün kaynak gereksinimini taşıyor. Etiketi değiştirip sütunu değiştirmezsen başka üretim ilişkileri yazarsın. Doğru sıralamada ekonomik içerik değişmez; yalnız aynı bilgiler farklı sırada görünür.

Check your explanation

☐ Identifies that columns must follow variable order.

☐ Gives A_new=[[1,2],[3,1]] and keeps resource constants[14,17].

☐ Uses output vector [y,x]=[4,5] and verifies both resources.

☐ Explains that representation changes, not technology or the economic plan.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-04-S3 Solution

$$y=40-2x$$

Isolate y.

Birinci kaynağın tam kullanım koşulunu koruyoruz.

$$x+3(40-2x)=17 \rightarrow x+120-6x=17$$

Substitute and distribute.

$-5\ x+120=17$ elde edilir.

$$-5x=-103 \rightarrow x=103/5=20.6$$

Subtract 120 and divide by -5.

Bölme geçerli; matematiksel x değeri pozitif.

$$y=40-2(103/5)=200/5-206/5=-6/5=-1.2$$

Recover y with exact fractions.

Kesirleri ortak paydada çıkarınca y negatiftir.

$$2(103/5)-6/5=40;103/5+3(-6/5)=17$$

Verify both equalities.

Cebir doğru olduğu halde y fiziksel üretim alanının dışındadır.

$$x+3y=17 \rightarrow x=17-3y \rightarrow 2x+y=2(17-3y)+y=34-5y\leq 34 \quad (y\geq 0)$$

Isolate x from the second balance, substitute into resource 1 use, distribute 2 and collect y. Since y is nonnegative, subtracting 5y cannot raise 34; full use of 40 is impossible.

İkinci eşitlikten $x=17-3$ y. İlk kaynak kullanımı $2\ x+y=34-5$ y; $y\geq 0$ ise en fazla 34 olabilir.40'a ulaşamaz.

Capacity model: $2x+y\leq 40$, $x+3y\leq 17$ would allow unused resources

Distinguish a different feasible-set definition.

Eşitlikleri eşitsizlik yapmak ilk modelin çözümünü düzeltmek değil, tam kullanım varsayımını değiştirmektir. Örneğin sıfır üretim bu yeni kapasite sınırlarını sağlar ama bu tek başına tercih edilen plan değildir.

Model English interpretation

The equalities have the algebraic solution $x=20.6$ and $y=-1.2$, but this is not a feasible physical production plan because y must be nonnegative. In fact, fully using 17 units of resource 2 with nonnegative outputs allows at most 34 units of resource 1 use, not 40. Allowing unused resources changes the equalities into capacity inequalities; that different model needs an objective or further conditions to select a preferred plan.

Türkçe reasoning

İki eşitliğin tutması ekonomik anlamı tek başına garanti etmez. y negatif olduğundan fiziksel üretim yorumu geçersizdir. Asıl çatışma iki kaynağın aynı anda tam kullanımındadır: ikinci kaynak 17 iken birinci kaynak 40 kullanılamaz. Kaynak boş bırakmayı kabul etmek yeni bir varsayımdır; o modelde de hangi planın “en iyi” olduğunu amaç belirtmeden söyleyemeyiz.

Check your explanation

☐ Reports the algebraic pair and verifies both balances.

☐ Rejects negative y as a feasible physical output.

☐ Uses $2x+y=34-5y\leq 34$ to explain the full-use conflict with 40.

☐ Distinguishes an inequality-capacity model and avoids an unsupported optimum claim.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-04-C1 Answer B

The first index is the equation/row; the second is the variable/column.

Önce 4. satıra git, sonra 3. sütunu bul. İndislerin sırası katsayının hangi bilinmeyene bağlandığını belirler.

If you chose differently: Read row first, column second.

a_{ij} için önce i, sonra j: denklem numarası, değişken numarası.

ME-04-C2 Answer B

A 3×2 times x 2×1 gives a 3×1 result: one output per equation.

İç boyutlar 2 ve 2 uyumlu. Üç denklem olduğundan çarpımın üç bileşeni vardır.

If you chose differently: Match the number of matrix columns to the number of vector entries.

A’nın sütun sayısı x’in satır sayısıyla eşleşmeli; sonuçta A’nın satır sayısı kalır.

ME-04-C3 Answer B

The missing y has coefficient zero; its position must remain.

y’nin görünmemesi sütunun yok olması değil, katsayısının 0 olmasıdır.

If you chose differently: Keep one coefficient position for every declared variable.

Üç değişken varsa her denklem satırında üç katsayı yeri olmalıdır.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I read a_{ij} as equation i, variable j and preserve missing zero coefficients.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I reconstruct every scalar equation from Ax=d.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I reorder rows/constants or columns/variables consistently.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I separate mathematical solutions from economically feasible outputs and from optimization.

Matristen denklemlere geri dönebiliyor muyum? Her katsayının hangi satır ve değişkene ait olduğunu söyleyebiliyor muyum? Sütun sırası değişince vektörü, satır sırası değişince sabitleri birlikte taşıyor muyum? Ekonomik modelde negatif çıktı ve tam kullanım varsayımını ayrıca tartışıyor muyum?

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Directly inspected second half of PDF p12 through p16. Covers the general m-equation/n-variable system, coefficient indexing including a43, variable/constant sets, matrix as array, dimensions, coefficient/variable/constant vectors, compact Ax=d and the general noncommutativity note. Both exact source example representations on pp15-16 are fully reconstructed and verified. The source’s abstract system has solution(−4,3,1); solving it is a supplemental completion, not an asserted economic quantity model. W1/S1-S3 are original resource examples with explicit full-use and nonnegative-output assumptions. No determinant or inverse is required in this unit.

ME-05 Matrix Operations, Special Matrices & Transpose

Source PDF pages 17-28

Choose valid operations, calculate each entry, explain multiplication order and distinguish transpose from inverse.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

A matrix is an organised collection, not a bag of numbers

An m × n matrix has m rows and n columns. The entry a_{ij} is in row i, column j. Rows and columns have an ordered meaning; rearranging entries generally changes the matrix.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
m, n	Numbers of rows and columns	Satır ve sütun sayıları
a_{ij}	Entry at row i, column j	i. satır, j. sütundaki eleman
α	A scalar: one real number	Bir gerçel sayı, matris değil

Türkçe explanation

Why economists need matrix operations

Matrices package many related calculations. If columns are products and rows are inputs, multiplying by a product-quantity vector gives total input requirements. A coefficient matrix A in Ax = d packages equations instead of a data table.

$$A_{m\times n}x_{n\times 1} = d_{m\times 1}$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
A	Coefficient or input-requirement matrix, as defined	Örneğe göre katsayı veya girdi ihtiyacı matrisi
x	Ordered variable/quantity column	Sırası sabit değişken/miktar sütunu
d	Result or constants column	Sonuç ya da sabitler sütunu

Türkçe explanation

Three operations answer different questions

A + B combines matching entries. αA scales every entry. AB composes relationships by summing row-column products. Matrix multiplication is not entry-by-entry multiplication.

Türkçe explanation

Inner dimensions match; outer dimensions survive

For $A_{m\times n}B_{n\times p}$, each row of A and column of B contain n entries. Their n matched products can be added; there are m choices of row and p choices of column.

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Türkçe explanation

Order and grouping are different choices

AB may differ from BA; one product may not exist. But compatible products satisfy (AB)C = A(BC): parentheses may move without reversing the order A, B, C.

(AB)C = A(BC), but AB is not generally BA

Türkçe explanation

Identity, zero and symmetry are properties with conditions

I_n is n × n with ones on the main diagonal and zeros elsewhere. $O_{m\times n}$ has zeros everywhere. A symmetric matrix satisfies $A^T = A$ and therefore must be square. The source also mentions variance-covariance matrices: they are symmetric because exchanging the two variables does not change covariance; no statistical derivation is supplied in the notes.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Türkçe explanation

Transpose changes the address, not the value

A^T (also A′ in the notes) turns row i into column i. An m × n matrix becomes n × m. Transpose is not inverse.

$$(A^T)_{ji} = a_{ij}$$

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-05-C1

A is 2 × 3 and B is 3 × 4. Before calculating, which statement is correct?

A. AB is 2 × 4; BA is undefined.

B. Both AB and BA are 2 × 4.

C. AB is 3 × 3.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-05-C2

A records kilograms per product and q records product quantities. Why does Aq add products within each row?

A. Because every matrix operation adds all entries.

B. Each term is kilograms for one product; adding gives total kilograms of that input.

C. Because matrix multiplication is entrywise.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-05-C3

For $A_{2\times3}$ and $B_{3\times4}$, which transpose-product formula has the correct order and dimensions?

A. $(AB)^T = A^TB^T$

B. $(AB)^T = B^TA^T$

C. $(AB)^T = AB$

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Entrywise operations

Derive each result from the meaning of a position.

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Assume A and B are both m × n. Combine only the same row and column.

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Multiply every entry by the same real number α; the dimensions do not change.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij} = (B+A)_{ij}$$

Scalar addition is commutative at every position, so matrix addition is commutative.

$$((A+B)+C)_{ij} = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$$

Scalar associativity gives (A+B)+C = A+(B+C) when all three matrices have the same size.

$$\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$$

At each position, $\alpha(a_{ij}+b_{ij})=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}$.

Detailed Turkish reasoning

Why the row-column rule works

Link n intermediate categories to form one result entry.

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Fix output row i and output column j. The shared index k runs from 1 to n.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \Sigma_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Multiply corresponding elements of row i and column j, then add all n products.

$$(AB)x: m\times n \cdot n\times p \cdot p\times 1 \rightarrow m\times 1$$

If B maps x into intermediate totals and A maps those totals into final totals, AB is the combined map.

Detailed Turkish reasoning

Identity and the rules that preserve order

Check the algebra without importing false scalar rules.

$$I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n$$

The left identity selects each row unchanged; the right identity selects each column unchanged.

$$A(B+C) = AB+AC;\ (A+B)C = AC+BC$$

Expand the sum within each row-column dot product. Keep the original left/right order.

$$((AB)C)_{ij} = \Sigma_{\ell=1}^{p}(\Sigma_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k\ell})c_{\ell j}$$

For $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times q}$, expand the first grouping.

$$= \Sigma_{k=1}^{n}a_{ik}(\Sigma_{\ell=1}^{p}b_{k\ell}c_{\ell j}) = (A(BC))_{ij}$$

Regroup finite scalar sums and products; the same terms appear in the same matrix order.

Detailed Turkish reasoning

Transpose identities, explained entry by entry

A' and A^{T} mean the same transpose here.

$$((A^{T})^{T})_{ij} = (A^{T})_{ji} = a_{ij}$$

Swap the address twice; recover A.

$$((A+B)^{T})_{ij} = a_{ji}+b_{ji} = (A^{T}+B^{T})_{ij}$$

Transpose commutes with addition when A and B have the same size.

$$((AB)^{T})_{ij} = (AB)_{ji} = \Sigma_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$$

Use the product formula at the swapped position.

$$= \Sigma_{k=1}^{n}(B^{T})_{ik}(A^{T})_{kj} = (B^{T}A^{T})_{ij}$$

Each summand is a product of real numbers, so its two scalar factors may switch order. Thus $(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Source examples: equality and componentwise arithmetic

Rebuild the exact numerical examples from pp. 17-20.

Source PDF pages 17-20

$$A = B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A = B because all four positions match; A ≠ C and B ≠ C.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=7,\ x_2=5$$

Equality of column vectors means equality of corresponding entries.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{bmatrix}$$

For two 2 × 2 matrices, add/subtract each matching pair.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 0+1 & -2+3 \\ 2+5 & 1+2 & 3+1 \end{bmatrix}$$

The two matrices are both 2 × 3; all six sums are valid.

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B+A$$

Evaluate the six sums; reversing addition gives the same entries.

$$3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Scale every entry by 3.

Türkçe source-example reasoning

Source examples: compatible products

Track the exact dimension patterns and row-column expressions in pp. 21-22.

Source PDF pages 21-22

$A_{2\times 2}B_{2\times 3} \rightarrow C_{2\times 3}$; $B_{2\times 3}A_{2\times 2} \rightarrow$ undefined

The first inner pair is 2 = 2; the reversed inner pair is 3 ≠ 2.

$A_{m\times n}B_{p\times q}$ is defined exactly when n=p; the result is m×q.

This is the source general rule with the original dimension letters: p is the number of rows of B, and q is its number of columns.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

A 1 × 2 row times a 2 × 3 matrix gives a 1 × 3 row.

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$; $c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$; $c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}$

Keep the A row fixed while moving through the three B columns.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

These are the square matrices introduced at the bottom of p. 22. Calculate both orders as a completed extension.

$$AB=\begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 2 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot 2 & 3\cdot 0+4\cdot 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Each AB entry uses an A row and a B column.

$$BA=\begin{bmatrix} -1\cdot 1+0\cdot 3 & -1\cdot 2+0\cdot 4 \\ 2\cdot 1+2\cdot 3 & 2\cdot 2+2\cdot 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}\neq AB$$

Changing order changes the numerical result, not just the notation.

Türkçe source-example reasoning

Source examples: square, identity, zero and algebraic laws

Complete the examples on pp. 23-26 and the repeated rules on p. 27.

Source PDF pages 23-27

$$A_{3\times 3}B_{3\times 3} \quad \rightarrow 3\times 3;\ I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Square means equal row and column counts; identity is a special square matrix.

$$I_2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 4 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 3+1\cdot 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

The source left-identity example preserves both rows.

$$O_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\quad O_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Both are zero matrices, but they are not equal because their sizes differ.

$A_{2\times 3}B_{3\times 2} \to 2\times 2;\ B_{3\times 2}A_{2\times 3} \to 3\times 3$

Both products exist, but their different dimensions already prevent equality.

$(A_{m\times n}B_{n\times p})C_{p\times q} \to m\times q;\ A_{m\times n}(B_{n\times p}C_{p\times q}) \to m\times q$

The source associativity pattern requires B to be n × p.

$A+B=B+A;\ (A+B)+C=A+(B+C);\ A(B+C)=AB+AC;\ (B+C)A=BA+CA;\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

These source rules hold under their matching-dimension conditions; their reasons are derived above.

Türkçe source-example reasoning

Source examples: transpose and row comparisons

Complete the source transpose calculation rather than stopping at the displayed products.

Source PDF pages 27-28

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow A^{T}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

The two rows of A become two columns of A^{T}.

$$AA^{T}=\begin{bmatrix}0^2+1^2+2^2 & 0\cdot 3+1\cdot(-1)+2\cdot(-2)\\ 3\cdot 0+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 3^2+(-1)^2+(-2)^2\end{bmatrix}$$

A row times a column of A^{T} is a dot product of two rows of A.

$$AA^{T}=\begin{bmatrix}5 & -5\\ -5 & 14\end{bmatrix};\quad (AA^{T})^{T}=AA^{T}$$

Evaluate $0+1+4=5$, $0-1-4=-5$ and $9+1+4=14$.

$B_{4\times 2}B^{T}_{2\times 4} \rightarrow 4\times 4$

The source also gives this dimension-only example: the inner dimension 2 matches, and the outer dimensions are 4 × 4.

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & t \\ 4 & t & 2 \end{bmatrix};\ S^{T}=S;\ I_3{}^{T}=I_3$$

The p. 28 source illustrates symmetry. The repeated off-diagonal handwritten digit is unclear; t preserves its matching positions without guessing its value.

$(A^{T})^{T}=A;\ (A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}=B^{T}+A^{T};\ (AB)^{T}=B^{T}A^{T}$

These are the transpose properties listed on p. 28; the product order reverses.

Source reading note - PDF 28

In the notes: Small embedded symmetric-matrix example contains a repeated handwritten off-diagonal digit that is not unambiguously readable.

Checked form: Use the same symbol t in both positions; symmetry holds for every real t.

The source digit is not guessed. The example still teaches and verifies the exact symmetry relationship.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-05-W1 Two inputs, three products, one cost

A firm produces q = $(10, 20, 5)^{T}$ units of products 1, 2 and 3. The input matrix is A = [[2, 1, 3], [1, 2, 0]]: row 1 is kilograms of material per unit of each product; row 2 is labour-hours per unit. The input-price row is p = [4, 6], measured in currency units per kilogram and per labour-hour. Predict the dimensions, find r = Aq and total cost K = pr, then verify K = (pA)q. If only product 1 rises by 2 units, find the change in each input and total cost. Assume constant input coefficients and input prices, and no other costs.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$A_{2\times 3}q_{3\times 1} \rightarrow r_{2\times 1};\ p_{1\times 2}r_{2\times 1} \rightarrow K_{1\times 1}$

Predict a two-entry input column and a single total-cost number.

$r_1 = 2(10)+1(20)+3(5) = 20+20+15 = 55$ kg

Multiply each material coefficient by its product quantity and add.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$r_2 = 1(10)+2(20)+0(5) = 10+40+0 = 50$ labour-hours

Repeat with the labour row.

$$r=\begin{bmatrix}55\\50\end{bmatrix};\quad K=4(55)+6(50)=220+300=520$$

Price the 55 kilograms and 50 labour-hours, then add monetary costs.

$$pA=\begin{bmatrix}4\cdot2+6\cdot1 & 4\cdot1+6\cdot2 & 4\cdot3+6\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 16 & 12\end{bmatrix}$$

Alternatively find each product’s input cost per unit first.

$(pA)q = 14(10)+16(20)+12(5) = 140+320+60 = 520 = p(Aq)$

The two groupings agree; order remains p, A, q.

$$\Delta q=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix};\quad \Delta r=A\Delta q=\begin{bmatrix}2\cdot2+1\cdot0+3\cdot0\\1\cdot2+2\cdot0+0\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

Use the change vector: two extra units of product 1 require 4 extra kilograms and 2 extra hours.

$\Delta K=p\Delta r=4(4)+6(2)=16+12=28$; $K_{new}=520+28=548$

Price the additional inputs; check 2 × 14 = 28 using unit cost.

Interpret before reading the model answer

In 2-3 exam-style sentences, interpret Aq, pA and your calculated cost increase. State why this is a conditional calculation rather than a forecast of profit.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

---

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-05-S1 Rebuild every operation

Let A = [[3, 1], [2, 4]] and B = [[1, 2], [0, 3]]. Compute A + B, 2A − B, AB, BA and A^T. Identify which results establish that multiplication is not generally commutative. If A and B are two weekly production tables with rows = factories and columns = the same two products, explain which of these operations directly combines the two weeks and which product AB would need further labels to interpret.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-05-S1 Interpretation and verification

Explain why A + B has a direct production interpretation but AB does not automatically have one, even though AB is mathematically defined.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-05-S2 Sales totals and a dimension error

A sales matrix is Q = [[4, 6, 2], [3, 5, 7]], with rows = stores and columns = products. The common price column is p = (5, 8, 10)^{T} currency units per item. Calculate store revenue Qp and total revenue. A student writes pQ instead. Diagnose the error, give Q^{T}, and state the correct dimensions of the left and right identity matrices in I Q = Q = Q I. Assume all recorded quantities are sold at these prices.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-05-S2 Interpretation and verification

Write a short revenue interpretation and explain why the result says nothing by itself about which store is more profitable.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-05-S3 Transpose is not an inverse

Let $A = [[1, 2, 0], [0, 1, 3]]$ and $B = [[2, 1], [1, 3], [0, 2]]$. Compute AB and $(AB)^T$; verify $(AB)^T = B^TA^T$. Explain why A^TB^T cannot be substituted for it even though that product is also defined. Compute AA^T and decide whether it equals I_2. For interpretation only, regard A as an index of resource requirements with rows = resources and columns = products, all quantities rescaled to dimensionless comparable units. What do diagonal and off-diagonal entries of AA^T compare?

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-05-S3 Interpretation and verification

Using the stated dimensionless resource indices, interpret your diagonal and off-diagonal entries of AA^T. Explain why they are not production totals or causal effects.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

A matrix is an organised collection, not a bag of numbers

Matris, sayıları yalnızca bir kutuya koymaz: her sayıya bir **adres ve anlam** verir. Bir tabloda satır fabrikayı, sütun ürünü gösteriyorsa a_{23} ikinci fabrikanın üçüncü ürününe aittir. Aynı sayıları başka yerlere koymak aynı bilgi değildir.

m ve n pozitif tam sayıdır. i satır numarasıdır (1,…,m); j sütun numarasıdır (1,…,n). Bu derste girişler gerçel sayılardır. Boyut her zaman **satır × sütun** sırasındadır. Matris eşitliği için hem boyut hem karşılıklı bütün girişler eşit olmalıdır.

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Back to English

Why economists need matrix operations

Örneğin bir ürünün kaç saat emek ve kaç kilogram malzeme kullandığını sütunlara koyarsak, üretim miktarlarıyla çarparak toplam kaynak ihtiyacını buluruz. Aynı biçim, önceki ünitede denklem sistemini kısa yazmak için kullanıldı: A katsayı matrisi, x bilinmeyenler sütunu, d sabitler sütunuydu.

A harfinin anlamı her örnekte açıklanmalıdır; bütün matrislerin otomatik olarak aynı ekonomik anlamı yoktur. Toplamadan önce aynı ürün/fabrika sırasını ve aynı ölçü birimini, çarpmadan önce birbirine bağlanan kategorileri kontrol et. Boyut uyumu matematiksel gerekliliktir; iktisadi anlam için etiket ve birim uyumu da gerekir.

$$A_{m\times n}x_{n\times 1} = d_{m\times 1}$$

Back to English

Three operations answer different questions

Toplama: aynı hücre anlamındaki iki dönemin miktarlarını birleştirir. **Skalerle çarpma:** bütün hücreleri aynı katsayıyla ölçekler; örneğin üretimi iki katına çıkarır. **Matris çarpımı:** ortak kategori üzerinden birleştirir: ürün başına emek × ürün miktarı, sonra ürünler üzerinden toplam.

A+B için iki matrisin boyutu aynı olmalı. AB için A’nın sütun sayısı B’nin satır sayısına eşit olmalı. Farklı kuralları ezber listesi olarak değil, yapılan işin gereği olarak oku.

Back to English

Inner dimensions match; outer dimensions survive

İç boyut n, üzerinden toplama yaptığımız ortak kategoridir. Örneğin A'nın sütunları üç ürün, B'nin satırları aynı sıradaki üç ürün ise her ürün eşleşir. Sonucun m satırı ilk matristen, p sütunu ikinci matristen gelir.

İşlemi yapmadan önce cevap kutusunu m×p çiz. Böylece bir yanlış boyutu uzun hesap sonunda değil baştan fark edersin. İç sayılar eşit değilse eksik veya fazladan bir eşleştirme vardır; çarpım tanımsızdır, sıfır değildir.

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Back to English

Order and grouping are different choices

Değişme (commutative), AB yerine BA yazmaktır; genelde geçerli değildir. **Birleşme (associative)**, sırayı koruyup önce hangi ikiliyi hesapladığını değiştirmektir; uygun boyutlarda geçerlidir.

Ekonomik zinciri düşün: ürün miktarlarından girdi miktarlarına, girdilerden maliyete geçiyorsun. Ara toplamı önce hesaplayabilir ya da ürün başına maliyeti önce bulabilirsin. Ama "fiyatları üretim miktarlarıyla ters sırada çarpmak" aynı ekonomik işlem değildir.

$(AB)C = A(BC)$, but AB is not generally BA

Back to English

Identity, zero and symmetry are properties with conditions

I birim matristir: doğru boyutla çarpıldığında girdiyi değiştirmez. O sıfır matrisidir: her hücre sıfırdır ve kare olmak zorunda değildir. Ana köşegen sol üstten sağ alta uzanır. Kare matrisin satır ve sütun sayısı aynıdır; her kare matris birim ya da simetrik değildir.

Simetri $a_{ij}=a_{ji}$ demektir. Kimlik matrisi simetriktir. Bir iktisadi veri tablosunun kare olması karşılıklı ilişkilerin eşit olduğunu kanıtlamaz. Notlardaki "variance-covariance matrix" ifadesi bir uygulama hatırlatmasıdır: kovaryans matrisi simetriktir çünkü $\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\operatorname{cov}(X_j,X_i)$. Notta bunun istatistiksel hesabı verilmediği için burada yeni bir istatistik ünitesi eklemiyoruz.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Back to English

Transpose changes the address, not the value

Transpoz alırken a_{ij} değerini değiştirmeden yeni matrisin j. satır, i. sütununa taşırsın. İki kez bu işlemi yapınca başlangıca dönersin. Sütun vektörünün transpozu satır vektörüdür.

A^T hemen her boyutta tanımlıdır; A^{-1} ise sonraki ünitede ele alınacak, yalnızca terslenebilir kare matrisler için tanımlıdır. A^TA veya AA^T genelde I değildir. Üstteki T bir kuvvet sayısı değil, işlemin adıdır.

$$(A^T)_{ji} = a_{ij}$$

Back to English

ME-05-C1 Question support

Önce iç boyutları karşılaştır; sonra dış boyutlarla sonuç kutusunu belirle.

Return to foundations

ME-05-C2 Question support

Bir satırın her teriminin hangi birime dönüştüğünü düşün.

Return to foundations

ME-05-C3 Question support

AB önce 2×4 olur; bunun transpozu 4×2 olmalı.

Return to foundations

Entrywise operations

Matris cebirini sayılar cebirine hücre hücre indiriyoruz.

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

A ve B aynı boyutta olmazsa karşılığı olmayan hücreler oluşur. Aynı boyut ve aynı ekonomik etiketler altında i,j adresindeki iki sayıyı toplar veya çıkarırız; başka hücrelere dokunmayız.

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$$

α bir sayıdır. Örneğin α=−2 ise sıfırlar yine sıfır, pozitifler negatif, negatifler pozitif olur. Sadece bir satırı çarpmak αA değildir; tüm girişler çarpılır.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij} = (B+A)_{ij}$$

Bu bir örnek değil, her i,j için gerekçedir. Boyutlar aynı ve bütün karşılıklı girişler eşit olduğundan matrisler eşittir.

$$((A+B)+C)_{ij} = (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$$

Parantezler değişti, A,B,C sırası değil. Her hücrede sayıların birleşme özelliği geçerli olduğu için matrislerde de geçerlidir.

$$\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$$

Skalerin dağıtılması, her hücrede sayısal dağılma özelliğidir. Toplamdaki iki matrisin aynı boyutta olması gerekir.

Back to English

Why the row-column rule works

Ortak ürün/kategori üzerinden eşleştir, çarp ve topla.

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

i sonuçtaki satırı, j sonuçtaki sütunu seçer. k aradaki eşleştirme indeksidir: A'nın k. sütunu B'nin k. satırıyla eşleşir. p, B'nin sütun sayısıdır.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \Sigma_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Σ "toplam" işaretidir; burada k=1'den n'ye kadar terimleri ekle demektir. Her sonuç hücresi bir toplamdır; yalnız $a_{ij}b_{ij}$ değildir. Bu tanım doğrusal bileşimleri art arda uygulamayı temsil eder.

$$(AB)x\text{: } m\times n \cdot n\times p \cdot p\times 1 \rightarrow m\times 1$$

B önce uygulanır çünkü x'in yanındadır. A(Bx) ifadesi önce Bx, sonra A ile çarpım demektir. Yazıdaki soldan-sağa matris sırasını ekonomik işlemin uygulanma sırasıyla karıştırma.

Back to English

Identity and the rules that preserve order

Uygun boyut koşulunu her kuralın parçası olarak tut.

$$I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} = A_{m\times n}I_n$$

I_m'nin i. satırı yalnız i. konumda 1 taşır; çarpımda A'nın i. satırının katsayısı 1, diğerlerinin katsayısı 0 olur. Sağdaki I_n de sütunları aynı şekilde seçer. Dikdörtgen A için soldaki ve sağdaki birim matris aynı boyutta değildir.

$$A(B+C) = AB+AC;\ (A+B)C = AC+BC$$

İlk eşitlikte $b_{kj}+c_{kj}$ her a_{ik} ile çarpılır: $a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}$. İkinci eşitlikte $(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}$ açılır. Sonuçları toplarken hiçbir matrisi diğerinin üzerinden geçirmiyoruz; AC yerine CA yazılamaz.

$$((AB)C)_{ij} = \Sigma_{\ell=1}^{p}(\Sigma_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k\ell})c_{\ell j}$$

Burada ℓ, B'nin sütunları/C'nin satırları arasında dolaşan ikinci toplama indeksidir; q son matrisin sütun sayısıdır. İlk çarpım AB boyutu m×p, son sonuç m×q olur.

$$= \Sigma_{k=1}^{n}a_{ik}(\Sigma_{\ell=1}^{p}b_{k\ell}c_{\ell j}) = (A(BC))_{ij}$$

Sonlu toplamda sayıların toplama/çarpma özellikleriyle gruplayabiliriz. BC boyutu n×q, A(BC) boyutu yine m×q olur. Her i,j girişi eşit olduğundan (AB)C=A(BC). Bu gerekçe AB=BA iddiası içermez.

Back to English

Transpose identities, explained entry by entry

Transpoz kurallarında özellikle çarpımın sırasını neden ters çevirdiğimizi gösteriyoruz.

$$((A^{T})^{T})_{ij} = (A^{T})_{ji} = a_{ij}$$

İlk işlem i,j adresini j,i yapar; ikinci işlem geri çevirir. Değer değişmediği için $(A^{T})^{T}=A$.

$$((A+B)^{T})_{ij} = a_{ji}+b_{ji} = (A^{T}+B^{T})_{ij}$$

Toplamanın ilgili girişini taşısak da önce girişleri taşıyıp sonra toplasak da $a_{ji}+b_{ji}$ elde ederiz. Ayrıca matris toplaması değişmeli olduğu için $A^{T}+B^{T}=B^{T}+A^{T}$.

$$((AB)^{T})_{ij} = (AB)_{ji} = \Sigma_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$$

A m×n, B n×p ise AB m×p ve transpozu p×m olur. i şimdi 1,…,p, j ise 1,…,m aralığındadır.

$$= \Sigma_{k=1}^{n}(B^{T})_{ik}(A^{T})_{kj} = (B^{T}A^{T})_{ij}$$

Burada a_{jk} ve b_{ki} birer sayıdır; sayısal çarpmanın değişme özelliğini kullanıyoruz, matrislerin değil. B^{T} p×n, A^{T} n×m olduğu için doğru sonuç p×m. Tüm girişler eşit olduğundan kural elde edilir.

Back to English

Source examples: equality and componentwise arithmetic

Kaynak sayılar korunmuştur; her hücreyi ayrı kontrol et.

Source PDF pages 17-20

$$A = B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A ve C aynı sayıları içerir ama aynı adreslerde değil. Örneğin $a_{12}=0$, $c_{12}=-3$. Eşit olmamaları için tek bir farklı hücre yeterlidir; boyutun aynı olması tek başına yetmez.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1=7,\ x_2=5$$

İki adet 2×1 matris eşit: ilk satırlar $x_1=7$, ikinci satırlar $x_2=5$ verir. Vektörde sıra önemlidir; x_1 ile x_2'yi değiştirmeyiz.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} \end{bmatrix}$$

Bu formül kaynak p18'deki genel 2×2 toplam/çıkarma kuralıdır. Artı seçersen bütün hücrelerde toplama; eksi seçersen A−B sırasıyla çıkarma yaparsın.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 & 0+1 & -2+3 \\ 2+5 & 1+2 & 3+1 \end{bmatrix}$$

İlk satırdaki üç toplamı sonra ikinci satırdakileri yap. İkinci matrisin ilk satırını birinci matrisin ikinci satırına eklemek adresleri bozar.

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B+A$$

$-1+0=-1$; $0+1=1$; $-2+3=1$; $2+5=7$; $1+2=3$; $3+1=4$. Bu örnek toplamanın değişme özelliğini gösterir. AB'nin de değişmeli olduğunu göstermez.

$$3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Kaynak p20'deki altı girişin hepsini 3 ile çarptık. −1 girişinin sonucu −3'tür; sıfır 0 kalır. Boyut yine 2×3.

Back to English

Source examples: compatible products

Her çarpımın önce boyutunu, sonra girişlerini belirle.

Source PDF pages 21-22

$A_{2\times2}B_{2\times3} \rightarrow C_{2\times3}$; $B_{2\times3}A_{2\times2} \rightarrow$ undefined

Öndeki (lead) ve arkadaki (lag) matris sırası sonucu belirler. İkinci ifade “farklı bir cevap” değil; standart matris çarpımı olarak tanımsızdır.

$A_{m\times n}B_{p\times q}$ is defined exactly when $n=p$; the result is $m\times q$.

Kaynak p21’de B’nin boyutunu p×q diye adlandırır. Bu gösterimde A’nın n sütunu B’nin p satırıyla eşleşmeli: n=p. Sonuç A’dan m satır, B’den q sütun alır. Üstteki türetmelerde B doğrudan n×p yazılarak eşleşme baştan sağlanmıştı; harfler farklı adlandırıldı ama kural aynıdır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{bmatrix}$$

A’nın tek satırı, B’nin üç sütunuyla ayrı ayrı çarpılır. Her çıktı iki terimli toplamdır.

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$; $c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$; $c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}$

İlk hücrede B’nin ilk sütunu (b_{11},b_{21}), ikincide ikinci sütunu (b_{12},b_{22}), üçüncüde üçüncü sütunu (b_{13},b_{23}) kullanılır.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Kaynak bu iki 2×2 matrisi verir. Aşağıda hesaplamayı tamamlıyoruz; her iki çarpım da tanımlı olduğu için gerçek bir değişmeme örneği elde ederiz.

$$AB=\begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot2 & 3\cdot0+4\cdot2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Sol üst: −1+4=3; sağ üst: 0+4=4; sol alt: −3+8=5; sağ alt: 0+8=8.

$$BA=\begin{bmatrix} -1\cdot1+0\cdot3 & -1\cdot2+0\cdot4 \\ 2\cdot1+2\cdot3 & 2\cdot2+2\cdot4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}\neq AB$$

Bu kez satırlar B’den, sütunlar A’dan geldi. Sonuçların boyutu aynı ama girişleri farklı. “Matris çarpımı genelde değişmeli değildir” demek hiçbir özel durumda AB=BA olamaz demek değildir.

Back to English

Source examples: square, identity, zero and algebraic laws

Kaynakta tekrarlanan kuralları aynı yerde, tüm boyut koşullarıyla ele alıyoruz.

Source PDF pages 23-27

$$A_{3\times3}B_{3\times3} \quad \rightarrow 3\times3;\ I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix};\ I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

3×3 iki matrisin çarpımında iç boyutlar 3=3 ve dış boyutlar 3×3. I_2 ve I_3’te yalnız ana köşegen 1, bütün diğer girişler 0. Kare olmak, köşegenin 1 olması anlamına gelmez.

$$I_2\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot0&1\cdot2+0\cdot1&1\cdot3+0\cdot4\\0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+1\cdot1&0\cdot3+1\cdot4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\end{bmatrix}$$

Her hücrede bir 1 ve bir 0 doğru satırı seçer. Sağdan çarpacak olsaydık 2×3 matris için I_3 gerekirdi: $AI_3=A$. AI_2 boyutsal olarak tanımsızdır.

$$O_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix};\ O_{2\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Sıfır matris kare olmak zorunda değildir. Boyutu yazmak karışıklığı önler. Örneğin $A_{2\times3}+O_{2\times3}=A$ olur; $A_{2\times3}+O_{2\times2}$ tanımsızdır.

$A_{2\times3}B_{3\times2} \rightarrow 2\times2$; $B_{3\times2}A_{2\times3} \rightarrow 3\times3$

Kaynak p25’teki örnekte iki iç boyut da uyumludur. Yine de farklı boyutlu sonuçlar aynı matris olamaz. Bu, “iki çarpım da tanımlıysa eşittir” hatasını düzeltir.

$(A_{m\times n}B_{n\times p})C_{p\times q} \rightarrow m\times q$; $A_{m\times n}(B_{n\times p}C_{p\times q}) \rightarrow m\times q$

A’nın n sütununu karşılayabilmek için B’nin n satırı; C’nin p satırını karşılayabilmek için B’nin p sütunu gerekir. Parantezler değişir, matris sırası korunur.

$A+B=B+A$; $(A+B)+C=A+(B+C)$; $A(B+C)=AB+AC$; $(B+C)A=BA+CA$; $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Toplama kurallarında tüm toplananlar aynı boyutta; çarpmalı kurallarda ilgili çarpımlar tanımlı olmalı. Son eşitlik p27'de skaler α ile verilen dağıtma kuralıdır. Sağdan dağıtırken A'yı sola taşıyamayız.

Back to English

Source examples: transpose and row comparisons

p27'de A ve A^T açık verilmiş; satır-satır benzerlik çarpımını tamamlıyoruz.

Source PDF pages 27-28

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

0,1,2 birinci sütuna; 3,−1,−2 ikinci sütuna geçti. A 2×3, A^T 3×2. Negatif işaretler korunur; transpoz işaret değiştirmez.

$$AA^T=\begin{bmatrix} 0^2+1^2+2^2 & 0\cdot 3+1\cdot(-1)+2\cdot(-2) \\ 3\cdot 0+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 3^2+(-1)^2+(-2)^2 \end{bmatrix}$$

Ana köşegen aynı satırın kendisiyle çarpımıdır; köşegen dışı iki farklı satırın çarpımı. Özellikle $(-1)^2=1$, $(-2)^2=4$; parantezleri unutma.

$$AA^T=\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 14 \end{bmatrix};\quad (AA^T)^T=AA^T$$

İki çapraz giriş eşit olduğundan sonuç simetrik. Ancak I_2 değildir; bu, A^T'nin ters matris olmadığını gösterir. Kaynak p27'deki $B_{4\times 2}B^T_{2\times 4}$ örneği de 4×4 sonuç verir; B'nin sayısal girişleri verilmediği için sayı üretmiyoruz.

$$B_{4\times 2}B^T_{2\times 4} \rightarrow 4\times 4$$

B'nin sayısal girişleri verilmemiştir; bu nedenle sayısal sonuç uydurmayız. B dört satır, iki sütun; transpozu iki satır, dört sütundur. BB^T dört satırı birbiriyle karşılaştıran 4×4 matris verir.

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & t \\ 4 & t & 2 \end{bmatrix};\quad S^T=S;\quad I_3{}^T=I_3$$

Kaynak görselindeki (2,3) ve (3,2) girişlerinin aynı yazıldığı açık; fakat küçük fotoğrafta sayının 7 mi 9 mu olduğu kesin seçilemiyor. Bu nedenle t ile gösteriyoruz: t herhangi bir gerçel sayı olduğunda da 0=0, 4=4, t=t eşleşmeleri simetriyi kanıtlar. 1,3,2 köşegen girişleri yer değiştirmez. Kimlik matrisi de kendi transpozuna eşittir.

$(A^T)^T=A$; $(A+B)^T=A^T+B^T=B^T+A^T$; $(AB)^T=B^TA^T$

Kaynakta AB=C için C m×p iken C^T p×m olur. Formülün ayrıntılı gerekçesi bu ünitenin transpoz türetmesinde verildi. Aynı sayfadaki ters matris konusu ME-07'de, bağımsızlık konusu ME-06'da ayrıntılı ele alınır.

Kaynak okuma notu - PDF 28

Okunamayan rakamı tahmin ederek kesin sayı diye sunmadık. İki karşılıklı girişte aynı t kullanılması, kaynakta amaçlanan simetri ilişkisini eksiksiz korur.

Back to English

ME-05-W1 Worked example support

Bu tablo gerçek bir hesap zinciri tanımlar: ürün miktarı → toplam malzeme ve emek → toplam değişken girdi maliyeti. Satırlardaki farklı fiziksel birimleri doğrudan toplayamazsın; fiyatla çarpıp aynı para birimine dönüştürünce maliyetleri toplayabilirsin. Çözümü açmadan önce r'nin kaç girişli ve K'nın hangi birimde olacağını yaz.

$A_{2\times 3}q_{3\times 1} \rightarrow r_{2\times 1}$; $p_{1\times 2}r_{2\times 1} \rightarrow K_{1\times 1}$

r_1 malzeme kilogramı, r_2 emek saatidir. p'nin ilk fiyatı malzemeye, ikincisi emeğe aittir. Çarpımda sıraları aynı tutuyoruz; K skaler olarak okunabilen 1×1 sonuçtur.

$r_1 = 2(10)+1(20)+3(5) = 20+20+15 = 55$ kg

Birinci ürün 20 kg, ikinci 20 kg, üçüncü 15 kg kullanır. Hepsi aynı girdinin kilogramı olduğundan toplam 55 kg anlamlıdır.

$r_2 = 1(10)+2(20)+0(5) = 10+40+0 = 50$ labour-hours

Üçüncü ürüne ait sıfır bu basit modelde doğrudan emek gereksinimi olmadığı varsayımıdır; ürünün gerçek hayatta hiç maliyeti olmadığını söylemez. İki girdi toplamının birimleri farklıdır.

$$r=\begin{bmatrix}55\\50\end{bmatrix};\quad K=4(55)+6(50)=220+300=520$$

4 para/kg × 55 kg = 220 para; 6 para/saat × 50 saat = 300 para. Birimler sadeleşerek aynı para birimine dönüştüğü için toplam 520 olur.

$$pA=\begin{bmatrix} 4\cdot2+6\cdot1 & 4\cdot1+6\cdot2 & 4\cdot3+6\cdot0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

Birinci ürünün bir birimi 2 kg ve 1 saat kullanır: 8+6=14. İkinci ürün 4+12=16, üçüncü 12+0=12. Sonuç 1×3 ürün-başına maliyet satırıdır.

$$(pA)q = 14(10)+16(20)+12(5) = 140+320+60 = 520 = p(Aq)$$

Bu birleşme özelliğinin iktisadi anlamıdır. Önce toplam kaynak sonra maliyet veya önce birim maliyet sonra miktar aynı toplamı verir. p,A,q sırasını ters çevirmedik.

$$\Delta q=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad \Delta r=A\Delta q=\begin{bmatrix} 2\cdot2+1\cdot0+3\cdot0 \\ 1\cdot2+2\cdot0+0\cdot0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Δ değişim demektir: yeni değer eksi eski değer. Sabit A altında $A(q+\Delta q)-Aq=A\Delta q$; bu doğrusal dağılma özelliğinden gelir, yeni bir davranış varsayımı değildir.

$$\Delta K=p\Delta r=4(4)+6(2)=16+12=28;\ Knew=520+28=548$$

Sonuç bağımsız biçimde ürün 1'in birim maliyetiyle kontrol edilir: 2 adet × 14 para/adet = 28 para. Yeni girdi vektörü $(59,52)^{T}$, maliyet 4×59+6×52=548 olur.

Aq ve pA'nın birimlerini, bulduğun maliyet değişiminin ne anlama geldiğini ve varsayımları açıklayan 2-3 cümle yaz.

Return to the worked example

ME-05-S1 Question support

Önce beş boş 2×2 kutu çiz. Toplama/çıkarma ve skaler işlemleri hücre hücre; AB ve BA'yı satır-sütun yap. Otomatik sayısal kontrol yalnız AB'nin dört girişini denetler; diğer sonuçları ve yorumu çözümle kendin karşılaştır.

A+B'nin anlamını belirt; AB'nin sırf boyutu uygun diye anlamlı bir üretim toplamı olmadığını açıkla.

Return to the problem

ME-05-S2 Question support

Her mağazanın üç ürün satışını aynı fiyatlarla değerlendir. Geliri kârla karıştırma. Toplam geliri bulurken iki mağazanın para cinsinden sonuçları toplanabilir.

Gelir farkını sayısal yaz; kâr karşılaştırması için hangi eksik bilgiye ihtiyaç olduğunu söyle.

Return to the problem

ME-05-S3 Question support

Bu soru iki yanlış genellemeyi test eder: “transpozda sıra değişmez” ve “A^T ters matristir”. Kaynak ihtiyacı için burada birimsiz standartlaştırılmış indeks kullandık; kilogram ile saat karelerini aynı fiziksel birim gibi yorumlamıyoruz.

Satırların kendiyle ve birbiriyle çarpımını yorumla; bu sayıları kaynak toplamı ya da neden-sonuç etkisi diye adlandırma.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-05-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-05-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-05-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-05-S1

For AB, row 1 is [3,1] and column 2 of B is [2,3]; their dot product is not 1 × 2.

Önce A+B'de aynı adresleri eşleştir. AB'de (1,2) girişi 3×2+1×3 olmalı. BA'da kullanılan satır ve sütunlar değişir.

Return and complete your attempt

ME-05-S2

Revenue is a row of quantities times the price column. Write (2 × 3)(3 × 1) before calculating.

İlk mağaza için 4×5+6×8+2×10. pQ sırasının iç boyutlarını ayrıca kontrol et.

Return and complete your attempt

ME-05-S3

AB is 2 × 2; B^TA^T is 2 × 2, but A^TB^T is 3 × 3.

Önce boyutla adayları ayır. AA^T'nin (1,2) girişi A'nın iki satırının iç çarpımıdır.

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-05-W1 Model interpretation

The plan requires 55 kg of material and 50 labour-hours, while pA gives input costs of 14, 16 and 12 currency units per product unit. Two additional units of product 1 raise input cost by 28 currency units, assuming unchanged technology and input prices. This is not a profit forecast because output revenue and any other costs are not specified.

Aq toplam fiziksel kaynakları; pA ise ürün başına parasal girdi maliyetlerini verir. Üretim artışı yalnız birinci üründe olduğundan A'nın birinci sütunu iki kez eklenir: +4 kg, +2 saat. Bunları fiyatlandırınca +28 para çıkar.

İşaret pozitiftir çünkü bu örnekte ilave üretim pozitif miktarda fiyatlandırılmış girdi gerektirir. Sabit teknik katsayı ve fiyat varsayımı yoksa eski birim maliyetleri doğrudan kullanamazdık. Satış fiyatı ve diğer maliyetler bilinmediği için kârın arttığını söylemek hatalıdır.

Check the explanation

☐ Distinguishes total input quantities from costs per product.

☐ Reports 4 additional kg, 2 additional labour-hours and 28 currency units.

☐ Conditions the result on fixed coefficients/prices and does not claim profit rises.

ME-05-S1 Solution

$$A+B=\begin{bmatrix} 3+1 & 1+2 \\ 2+0 & 4+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Add matching entries.

Aynı fabrikanın aynı ürününü iki hafta boyunca toplarız; ekonomik etiketler aynı sırada olmalıdır.

$$2A-B=\begin{bmatrix} 6-1 & 2-2 \\ 4-0 & 8-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Scale all four A entries, then subtract B entry by entry.

Önce 2A=[[6,2],[4,8]] olur. B'nin bütün girişleri doğru adresten çıkarılır; 2(A−B) yazmak farklı işlemdir.

$$AB=\begin{bmatrix} 3\cdot1+1\cdot0 & 3\cdot2+1\cdot3 \\ 2\cdot1+4\cdot0 & 2\cdot2+4\cdot3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Use each A row against each B column.

Dört toplam sırasıyla 3+0=3, 6+3=9, 2+0=2, 4+12=16.

$$BA=\begin{bmatrix} 1\cdot3+2\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot4 \\ 0\cdot3+3\cdot2 & 0\cdot1+3\cdot4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}\neq AB$$

Use B rows against A columns.

Sol üst 7 ile 3 farklı; dolayısıyla matrisler eşit değil. Bazı hücrelerin eşit olması bütün matrislerin eşitliğine yetmez.

$$A^{T}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Move each A row into a column.

$A_{12}=1$, transpozun (2,1) girişine; $A_{21}=2$, transpozun (1,2) girişine gider. Köşegen 3 ve 4 aynı yerde kalır.

Model English interpretation

A + B gives two-week output for each factory-product pair if both weeks use the same units and ordering. AB is a valid numerical matrix product, but the columns of A are products while the rows of B are factories; the supplied labels do not define a shared economic category. Therefore AB cannot automatically be read as two-week production.

Türkçe reasoning

Boyutların ikisinin de 2 olması etiketlerin aynı olduğu anlamına gelmez. A sütunundaki “ürün 1” ile B satırındaki “fabrika 1” yalnız numarası aynı diye eşleştirilemez. Bu örnek boyut uyumunun gerekli fakat iktisadi yorum için tek başına yeterli olmadığını öğretir.

Check your explanation

☐ A+B totals matching factory-product cells across weeks.

☐ AB is defined algebraically but its shared dimensions do not match the supplied categories.

☐ Does not interpret AB as total production.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-05-S2 Solution

$Q_{2\times 3}p_{3\times 1} \rightarrow 2\times 1$; $p_{3\times 1}Q_{2\times 3}$ is undefined ($1 \neq 2$)

Check conformability before arithmetic.

pQ için iç boyutlar 1 ve 2 farklıdır; bu işlem sadece “yanlış sıra” değil, tanımsız çarpımdır.

$$Qp=\begin{bmatrix} 4\cdot 5+6\cdot 8+2\cdot 10 \\ 3\cdot 5+5\cdot 8+7\cdot 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20+48+20 \\ 15+40+70 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 88 \\ 125 \end{bmatrix}$$

Price and sum each store’s product sales.

Ürün adedi × para/adet = para. Birinci mağaza 88, ikinci 125 para gelir elde eder.

Total revenue $= 88+125=213$

Add the two store revenues.

İki sonuç aynı para birimi ve döneme ait olduğundan toplanabilir. Satış miktarlarının hepsinin verilen fiyatlardan satıldığı varsayıldı.

$$Q^{T}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix};\quad I_2Q=Q=QI_3$$

Transpose swaps store and product axes; identity sizes differ.

Q^T satırları artık ürünler, sütunları mağazalardır. I_2 solda iki mağaza satırını, I_3 sağda üç ürün sütununu korur.

Model English interpretation

Store revenues are 88 and 125 currency units, for a total of 213; store 2 earns 37 more in sales revenue. This does not establish higher profit because the stores’ costs are not given. The calculation assumes all listed units are sold at the common fixed prices.

Türkçe reasoning

$125-88=37$ yalnız satış geliri farkıdır. Daha yüksek kira, personel veya ürün tedarik maliyeti bu farkı aşabilir. Matris çarpımı burada fiyatlandırmayı düzenler; tüketici davranışı ya da gelecekteki satış miktarı hakkında nedensel tahmin yapmaz.

Check your explanation

☐ Reports revenues 88 and 125 and total 213 in currency units.

☐ Store 2 revenue exceeds store 1 by 37.

□ No profit ranking without costs.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-05-S3 Solution

$$AB=\begin{bmatrix} 1\cdot2+2\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot3+0\cdot2 \\ 0\cdot2+1\cdot1+3\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot3+3\cdot2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Compute all four row-column sums.

Sonuç 2×2. Üst sağ 1+6+0=7; alt sol 0+1+0=1, yani AB simetrik değildir.

$$(AB)^{T}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix};\quad B^{T}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};\quad A^{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Transpose each matrix without changing values.

AB'nin 7 ve 1 girişleri yer değiştirir. B^{T} 2×3, A^{T} 3×2 olur.

$$B^{T}A^{T}=\begin{bmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+0\cdot3 \\ 1\cdot1+3\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot0+3\cdot1+2\cdot3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}=(AB)^{T}$$

Verify the reversed-order identity numerically.

Dört girişin tamamı eşit. $A^{T}B^{T}$ ise (3×2)(2×3) olduğundan 3×3 olur; tanımlıdır ama 2×2 matrisle eşit olamaz.

$$AA^{T}=\begin{bmatrix} 1^{2}+2^{2}+0^{2} & 1\cdot0+2\cdot1+0\cdot3 \\ 0\cdot1+1\cdot2+3\cdot0 & 0^{2}+1^{2}+3^{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}\neq I_{2}$$

The row-comparison matrix is symmetric, but not the identity.

Ana köşegen 5 ve 10, çapraz girişler 2. I_2'nin köşegeni 1 ve çaprazı 0 olmalıydı. Üstelik A dikdörtgen olduğundan burada sıradan iki taraflı A^{-1} zaten tanımlı değildir.

Model English interpretation

The diagonal entries 5 and 10 measure the sums of squared indices in the two resource profiles; the off-diagonal 2 is their dot product. These compare the specified profiles rather than calculate total resources used, since no production quantity vector is applied. They are not causal effects and are not a normalized correlation measure.

Türkçe reasoning

Birinci profil (1,2,0), ikincisi (0,1,3). Kendiyle çarpım 5 ve 10; iki profilin aynı ürünlerdeki indeks çarpımlarının toplamı 2'dir. Bu değerler ölçeğe bağlıdır ve bir korelasyon katsayısı gibi −1 ile 1 arasında olmak zorunda değildir. Toplam kaynak için ayrıca ürün miktarı q gerekir ve işlem Aq olur.

Check your explanation

☐ Diagonal entries are sums of squared row indices.

☐ Off-diagonal 2 is the dot product of the two resource profiles.

☐ No output quantity vector or causal model is supplied.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-05-C1 Answer A

The shared dimension is 3; the output keeps 2 rows and 4 columns. BA would require 4 = 2.

AB için 3=3 eşleşir ve dış boyutlar 2×4 kalır. BA için 4 ile 2 eşleşmez. Tanımsız bir çarpıma "0" yazamayız.

If you chose differently: Write the dimensions in the same order as the matrices. Do not compare only the outside numbers.

A ve B'nin boyutlarını çarpım sırasıyla yan yana yaz. İçteki sayılar eşit mi? Sıralamayı ters çevirdiğinde bu testi yeniden yap.

ME-05-C2 Answer B

The common product index disappears in the sum; the input category remains.

(kg/ürün)×ürün=kg. Aynı girdinin farklı ürünlerde kullanılan kilogramlarını toplarız. Satır hangi girdiyi anlattığını korur; ürün indeksi toplamda ortadan kalkar.

If you chose differently: Track the units of $a_{ij}q_j$, then ask what summing over j means.

Önce tek terimi oku: i girdisinin j ürünü için birim ihtiyacı × j ürününün miktarı. Sonra bütün ürünleri topla.

ME-05-C3 Answer B

B^T is 4 × 3 and A^T is 3 × 2, giving 4 × 2. The order reverses.

B^TA^T boyutları (4×3)(3×2) olduğundan 4×2 verir. A^TB^T ise (3×2)(4×3): iç boyutlar uyuşmaz. Boyut testi yanlış kuralı daha hesap yapmadan yakalar.

If you chose differently: Transpose both sizes, then test the product. The result must be 4 × 2.

Her matrisin satır ve sütun sayısını değiştir. Sonra çarpımın iç sayıları eşleşiyor mu diye bak; sonuç mutlaka 4×2 olmalı.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I check dimensions and category labels before calculating.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can distinguish entrywise addition/scaling from row-column multiplication.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can explain why associativity preserves order and transpose reverses product order.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can interpret a labeled matrix result without inventing economic meaning.

Çözüm kapalıyken her hücrenin nereden geldiğini söyle. Bir hesap tutsa bile boyut, kategori sırası ve ölçü birimi uygun değilse ekonomik yorumu durdur. Birim/sıfır/simetrik matrisleri tanımlarından ayırt et; transpozu ters matrisle karıştırma.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Visually verified PDF pp. 17-28, including high-resolution crops of embedded notes on pp. 27-28. Exact readable source examples are retained and completed; original W1/S1-S3 are separate. One repeated symmetric off-diagonal digit on p. 28 is uncertain and explicitly parameterized. All other calculations were independently recomputed. p. 28 inverse notes are covered in ME-07; p. 28 independence notes are covered in ME-06. No external theory is silently attributed to the notes.

ME-06 Linear Independence & Determinants

Source PDF pages 29-35; independence preview on 28

Test independence, compute 2×2 and 3×3 determinants, and separate unique algebraic solutions from feasible economic solutions.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

Equations can repeat information

A square matrix has as many rows as columns, but that alone does not guarantee a unique solution. A row may be a linear combination of the other rows, so it adds no new independent coefficient information.

$$A_{n\times n}x_{n\times 1} = d_{n\times 1}$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
A	Square coefficient matrix	Kare katsayı matrisi
x	Unknown-variable column	Bilinmeyenler sütunu
d	Given right-hand-side column	Verilen sağ-taraf sabitleri
n	Number of rows and columns	Satır/sütun sayısı, pozitif tam sayı

Türkçe explanation

Linear combination: scale and add vectors

Given vectors $v_1,\dots,v_r$ of the same dimension and real coefficients $k_1,\dots,k_r$, a linear combination is $k_1v_1+\cdots+k_rv_r$. Independence means the zero vector can be formed only by choosing every coefficient equal to zero. The source calls the common vector space V; in these examples we can take $V = \mathbb{R}^m$, the set of all real vectors with m components, which is closed under addition and scalar multiplication.

$$k_1v_1 + \cdots + k_rv_r = 0$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
v_i	Vector i, all vectors in the same space	Aynı boyuttaki i. vektör
k_i	Real scalar coefficient, possibly zero	Sıfır da olabilen gerçel katsayı
0	Zero vector of the matching dimension	Aynı boyuttaki sıfır vektör
V, $\mathbb{R}^m$	Common space of m-component real vectors	m bileşenli gerçel vektörlerin ortak uzayı

Türkçe explanation

Rows and columns are two views of the same matrix

An n × n matrix can be viewed as n row vectors or n column vectors. For a square matrix, independent rows, independent columns, a nonzero determinant and existence of an inverse are equivalent conditions.

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{independent rows} \Leftrightarrow \text{independent columns} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ exists}$$

Türkçe explanation

A determinant is one number, not another matrix

For a square matrix A, det(A), |A| and sometimes Det A denote its determinant. The bars here do not mean the absolute value of every entry. A negative determinant can be perfectly nonzero.

$$\text{For } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Türkçe explanation

“Not all zero” is the crucial test

To prove dependence, one explicit nonzero coefficient vector producing zero is enough. To prove independence, you must show that every solution of the coefficient equation is zero.

Türkçe explanation

Geometry: a different arrow can carry the same direction

The source vectors $(1,-2)^T$ and $(-2,4)^T$ point in opposite directions along the same line because the second is -2 times the first. Distinct vectors need not be independent.

$v_2 = -2v_1 \Rightarrow 2v_1+v_2 = 0$

Türkçe explanation

Nonzero does not mean positive, large, stable or feasible

The determinant’s nonzero status answers a uniqueness question. Its sign alone does not say that prices, quantities or profits are positive, nor that a dynamic adjustment process is stable.

Türkçe explanation

Minor versus cofactor

M_{ij} is the determinant of the smaller matrix left after deleting row i and column j. The cofactor C_{ij} adds the sign $(-1)^{i+j}$. The source uses C for cofactors; here C is not a separate data matrix.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}; \qquad \text{sign pattern} \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
M_{ij}	Minor: determinant after deleting row i and column j	i. satır ve j. sütun silindikten sonra kalan determinant
C_{ij}	Signed minor (cofactor)	İşaretli minör, kofaktör

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-06-C1

You find $-2v_1 + 0v_2 + v_3 = 0$. What follows?

A. The vectors are independent because one coefficient is zero.

B. The vectors are dependent because the coefficients are not all zero.

C. Nothing follows unless every coefficient is nonzero.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-06-C2

A square coefficient matrix has det(A) = 0. Which conclusion is justified without inspecting d?

A. Ax = d has no solution for every d.

B. Ax = d has infinitely many solutions for every d.

C. A is singular; Ax = d has no unique solution, but consistency depends on d.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-06-C3

A 3 × 3 determinant is expanded through row 2. Which minor-sign pattern is correct?

A. $+a_{21}M_{21} - a_{22}M_{22} + a_{23}M_{23}$

B. $-a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$

C. $+a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} + a_{23}M_{23}$

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-06-C4

A model gives det(A) ≠ 0 but its unique output vector includes −5 units. What should you report?

A. The determinant calculation must be wrong.

B. The algebraic solution is unique but violates nonnegative production; the economic restrictions need review.

C. Negative production proves the dynamic system is unstable.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Testing a nontrivial combination

Translate one vector equation into ordinary scalar equations.

$k_1v_1+\cdots+k_rv_r=0$

Start with all coefficients unknown; the zero vector has the same dimension as each v_i.

$k_1=\cdots=k_r=0$ is always a solution

Substitute zeros: each term becomes a zero vector.

If some $k_j\neq0$, then $v_j=-\Sigma_{i\neq j}(k_i/k_j)v_i$

Move the other terms to the right and divide by the chosen nonzero coefficient.

Only all-zero coefficients ⇒ independent; at least one nontrivial relation ⇒ dependent

These are opposite cases of the definition.

Detailed Turkish reasoning

Why the 2 × 2 determinant appears in elimination

The determinant is the coefficient left when the other unknown is eliminated.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=d_1;\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=d_2$

Write the two scalar equations represented by Ax=d.

$a_{22}(a_{11}x_1+a_{12}x_2) - a_{12}(a_{21}x_1+a_{22}x_2) = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

Multiply the first equation by a_{22}, the second by a_{12}, then subtract the second from the first.

$a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2-a_{12}a_{21}x_1-a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

Distribute the products and the subtraction sign to every term.

$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

Factor x_1; name its remaining coefficient $\Delta = \det(A)$.

$\Delta x_2=a_{11}d_2-a_{21}d_1$

Similarly, multiply equation 2 by a_{11} and equation 1 by a_{21}, then subtract to eliminate x_1.

If $\Delta\neq0$: $x_1=(a_{22}d_1-a_{12}d_2)/\Delta;\ x_2=(a_{11}d_2-a_{21}d_1)/\Delta$

Divide by the common nonzero determinant; each unknown has one specified value.

If $\Delta=0$, do not divide: $0\cdot x_1 = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

Zero on the left may produce either a contradiction or a redundant equality; inspect the original equations.

Detailed Turkish reasoning

Computing a 3 × 3 determinant by cofactors

Reduce one 3 × 3 calculation to three 2 × 2 calculations.

$M_{11} = a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$

Delete row 1 and column 1; take the determinant of the remaining 2 × 2 matrix.

$M_{12} = a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31};\ M_{13} = a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$

Delete the same row and, in turn, columns 2 and 3.

$C_{11}=M_{11}$; $C_{12}=-M_{12}$; $C_{13}=M_{13}$

Apply the first-row cofactor signs +, −, +.

$\det(A)=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13} = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$

Multiply each selected entry by its own cofactor and add.

$\det(A)=-a_{21}M_{21}+a_{22}M_{22}-a_{23}M_{23} = a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}$

Expansion through row 2 uses −, +, −; any row or column gives the same determinant.

$\det(A)=\Sigma_{j=1}^{3}a_{ij}C_{ij}$ or $\Sigma_{i=1}^{3}a_{ij}C_{ij}$

Fix a row i in the first sum, or fix a column j in the second sum; vary only the other index.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Source examples: row vectors and dependent rows

Complete the definitions and the three-row example on pp. 28-31.

Source PDF pages 28-31

$r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$; $A = [r_1; r_2; \ldots; r_n]$

Read an n × n matrix as an ordered list of n row vectors; columns provide the alternative view.

$$r = [1,2,3];\quad r \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1+2x_2+3x_3$$

The small source row [1,2,3] can be read as the coefficients of one three-variable equation; no right-hand-side number is supplied there.

$$v= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix};\quad v^{T}=[4,2]$$

The source sketch locates a vector by its two coordinates; transposition changes row/column orientation, not its coordinates.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix};\ r_1=[3,4,5],\ r_2=[0,1,2],\ r_3=[6,8,10]$$

These are the exact three rows shown in the source.

$r_3=2r_1 \Rightarrow r_3-2r_1-0r_2=0 \Rightarrow (k_1,k_2,k_3)=(-2,0,1)$

One nontrivial zero combination proves the three rows dependent.

$r_1 = (1/2)r_3 - 0r_2$

Solve the same dependence relation for row 1; one row is a linear combination of the others.

Source reading note - PDF 31

In the notes: A short summary bullet links linearly independent vectors with a non-trivial solution, contrary to the full definition on p. 30.

Checked form: Independent vectors have only the trivial coefficient solution. A nontrivial zero combination proves dependence.

The summary bullet is corrected, not memorized. The explicit source relation (−2,0,1) correctly demonstrates dependence.

Türkçe source-example reasoning

Source example: the homogeneous system at the top of p. 32

A homogeneous system has a zero right-hand side; solve this source example fully.

Source PDF pages 32

$x+y+z=0;\ 2x-3y+z=0;\ -x+2y-4z=0$

All right-hand sides are zero; x=y=z=0 is automatically a solution.

$x=-y-z$

Subtract y+z from both sides of the first equation.

$2(-y-z)-3y+z=0 \Rightarrow -2y-2z-3y+z=0 \Rightarrow -5y-z=0 \Rightarrow z=-5y$

Substitute into the second equation and combine like terms.

$-(-y-z)+2y-4z=0 \Rightarrow y+z+2y-4z=0 \Rightarrow 3y-3z=0 \Rightarrow y=z$

Substitute into the third equation; divide by nonzero 3.

$$y=z=-5y \Rightarrow 6y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow x=0$$

Combine both restrictions; only the trivial solution remains.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 1(12-2)-1(-8+1)+1(4-3)=10+7+1=18\neq 0$$

Independently check uniqueness with the determinant.

Türkçe source-example reasoning

Source example: two opposite-direction vectors

Complete the p. 32 algebra and interpret the p. 33 diagram.

Source PDF pages 32-33

$$v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix};\quad v_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix};\quad v_1^T=[1,-2],\ v_2^T=[-2,4]$$

The source records both column and row notation for the same coordinates.

$$v_2=-2v_1 \Rightarrow v_2+2v_1=0$$

Choose $k_1=2$ and $k_2=1$ to exhibit a nontrivial relation.

$$k_1v_1+k_2v_2=0 \Rightarrow k_1-2k_2=0;\ -2k_1+4k_2=0$$

Translate the vector equation into its two coordinates.

$$k_1=2k_2;\ -2(2k_2)+4k_2=0 \Rightarrow 0=0$$

Use the first restriction in the second; no new restriction appears.

$k_2=t$, $k_1=2t$ ($t\in\mathbb{R}$); $t=0$ gives $(0,0)$, $t=1$ gives $(2,1)$

There are infinitely many coefficient solutions, including the trivial one.

$v_1=(1,-2)^T$ points southeast; $v_2=(-2,4)^T$ points northwest on the same line

The p. 33 picture shows opposite arrows on one supporting line, not two independent directions.

Source reading note - PDF 32

In the notes: One recopied lower-left line writes $k_1+2k_2=0$, while the coordinate equation above is $k_1-2k_2=0$.

Checked form: With $v_1=(1,-2)^T$ and $v_2=(-2,4)^T$, the first coordinate is k_1-2k_2, giving $k_1=2k_2$.

This isolated plus sign is a source slip. The displayed vectors, original coordinate equation and resulting relation all require a minus sign.

Türkçe source-example reasoning

Source example: a nonzero 2 × 2 determinant

The source system has determinant −11; complete the solution and verify it.

Source PDF pages 33-34

$$2x+5y=13;\ x-3y=-3 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, d=\begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Read coefficients and constants without dropping signs.

$$\det(A)=2(-3)-5(1)=-6-5=-11\neq 0$$

Multiply the main diagonal and subtract the other diagonal product.

$$x=3y-3;\ 2(3y-3)+5y=13$$

From equation 2 add 3y to both sides, then substitute into equation 1.

$$6y-6+5y=13 \Rightarrow 11y-6=13 \Rightarrow 11y=19 \Rightarrow y=19/11$$

Distribute, collect y terms, add 6 to both sides and divide by nonzero 11.

$$x=3(19/11)-3=57/11-33/11=24/11$$

Use a common denominator to obtain x.

$$2(24/11)+5(19/11)=143/11=13;\ 24/11-3(19/11)=-33/11=-3$$

Verify both original equations independently.

Türkçe source-example reasoning

Source example: the third-order determinant, two ways

Use the exact p. 35 matrix and both expansions shown in the notes.

Source PDF pages 35

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Start with the exact source entries.

$$M_{11}=\det\begin{bmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{bmatrix}=5\cdot 9-6\cdot 8=45-48=-3$$

Delete row 1 and column 1.

$$M_{12}=\det\begin{bmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{bmatrix}=4\cdot 9-6\cdot 7=36-42=-6$$

Delete row 1 and column 2.

$$M_{13}=\det\begin{bmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{bmatrix}=4\cdot 8-5\cdot 7=32-35=-3$$

Delete row 1 and column 3.

$$\det(A)=2M_{11}-1M_{12}+3M_{13}=2(-3)-1(-6)+3(-3)=-6+6-9=-9$$

Expand through row 1 using +, −, +.

$$M_{22}=\det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 7 & 9\end{bmatrix}=18-21=-3;\ \ M_{32}=\det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}=12-12=0$$

Prepare the remaining minors for an independent column-2 expansion; M_{12} is already -6.

$$\det(A)=-a_{12}M_{12}+a_{22}M_{22}-a_{32}M_{32} = -1(-6)+5(-3)-8(0)=6-15-0=-9$$

Column 2 gives exactly the same determinant.

$\det(A)=-9\neq 0 \Rightarrow$ A is nonsingular; A^{-1} exists; rows/columns are independent

The nonzero determinant implies uniqueness for $Ax=d$ for every compatible d.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-06-W1 A unique production mix can still fail feasibility

A firm makes two divisible products. One unit of product 1 requires 2 kg of material and 1 labour-hour; one unit of product 2 requires 1 kg and 2 labour-hours. It must use exactly 100 kg and 80 labour-hours. Let x and y be the output quantities. Build Ax=d, test uniqueness with det(A), solve by elimination and verify both balances. Then keep the same technology but change the exact labour-use target to 20 hours, leaving material use at 100 kg. Solve again and assess nonnegative-output feasibility. This is an exact-use model, not a capacity-inequality or profit-maximization model.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$$2x+y=100;\ \ x+2y=80;\ \ A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ d=\begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Translate each resource balance into one row.

$$\det(A)=2\cdot 2-1\cdot 1=4-1=3\neq 0$$

The coefficient matrix is nonsingular; each right-hand side has one real algebraic solution.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$$2(x+2y)=2(80) \Rightarrow 2x+4y=160$$

Multiply the labour equation by 2 to align the x coefficients.

$$(2x+4y)-(2x+y)=160-100 \Rightarrow 3y=60 \Rightarrow y=20$$

Subtract the material equation and divide by 3.

$$x+2(20)=80 \Rightarrow x+40=80 \Rightarrow x=40$$

Substitute y into the labour equation and subtract 40 from both sides.

$2(40)+20=100$ kg; $40+2(20)=80$ hours; $x,y\geq 0$

Both balances and nonnegative-output restrictions hold.

New $d=\begin{bmatrix}100\\20\end{bmatrix}$; $\det(A)=3$ still

Changing only the right-hand side does not change the determinant.

$2(x+2y)-(2x+y)=40-100 \Rightarrow 3y=-60 \Rightarrow y=-20$

Repeat the same elimination with the new labour target.

$x+2(-20)=20 \Rightarrow x-40=20 \Rightarrow x=60$

Find the new x value.

$2(60)-20=100$; $60+2(-20)=20$; $y<0$

The new vector satisfies both equalities but violates nonnegative production.

For $x,y\geq 0$: $2x+y \leq 2x+4y = 2(x+2y)$. If labour use is 20, material use ≤ 40, not 100.

The technology provides a direct feasibility explanation: a nonnegative mix cannot use more than 2 kg of material per labour-hour.

Interpret before reading the model answer

Write an exam-style comparison of the two scenarios. Explain why unchanged det(A) does not imply unchanged feasibility, and distinguish exact-use inconsistency with nonnegative outputs from the algebraic existence of a solution.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-06-S1 Rebuild a unique resource balance

Two divisible products use material and labour. Their coefficient matrix is A = [[3, 1], [1, 2]]: row 1 is kg per product unit and row 2 is labour-hours per unit. Exact-use targets are $d = (80, 70)^T$. Compute det(A), decide whether the columns are independent, solve $Ax=d$ for $x=(x_1,x_2)^T$ by elimination, and verify both resource totals. Explain the economic meaning and limits of uniqueness.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-06-S1 Interpretation and verification

In 2-3 sentences, interpret the calculated production plan and explain why “unique” does not mean “profit-maximizing.”

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-06-S2 Singular does not mean the same outcome every time

A plant uses two machines. Per-unit machine-hour requirements for two divisible products are A = [[2, 4], [1, 2]]. First the exact-use target is d = (12, 6)^{T}; then only the second-machine target changes, giving đ = (12, 7)^{T}. Compute det(A), exhibit a nontrivial dependence relation between rows, characterize every real solution in the first case and the nonnegative subset, and determine whether the second case has a solution.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-06-S2 Interpretation and verification

Explain the economic difference between redundant machine-use targets and inconsistent machine-use targets. What changed, and what did not?

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-06-S3 A three-product plan and a sign trap

For three divisible products, A = [[2, 1, 0], [0, 3, 1], [1, 0, 2]] records requirements per unit: row 1 is material kg, row 2 labour-hours and row 3 energy kWh. Exact targets are d = (40, 75, 40)^{T}. Compute det(A) by row 1 and check it by row 2. A student uses the sign pattern +, −, + for row 2; diagnose this error. Solve Ax=d by substitution and verify all three resource totals and nonnegative output. Does a positive determinant alone prove positive quantities or stable adjustment?

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-06-S3 Interpretation and verification

Write a concise interpretation of the plan, explaining what the determinant establishes and what the verified quantities establish. State one economic conclusion the model cannot support.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

Equations can repeat information

İki bilinmeyen ve iki denklem görmek, otomatik olarak iki bağımsız bilgi görmek değildir. Örneğin x+2y=6 ile 2x+4y=12 aynı kısıtı iki kez söyler. İkinci denklemin katsayıları ilkinin iki katıdır; sağ taraf da uyduğu için bir doğruyu tekrar eder.

Ama ikinci sağ tarafı 13 yaparsan aynı katsayılar bu kez çelişki verir. Bu yüzden **katsayıların bağımlılığı** ile **sistemin tutarlılığı** farklı sorulardır. Bu ünitede önce A'nın yapısını, sonra d ile birlikte Ax=d'nin çözümünü değerlendiriyoruz.

$$A_{n\times n}x_{n\times 1} = d_{n\times 1}$$

Back to English

Linear combination: scale and add vectors

$v_1,\dots,v_r$ vektörlerin isimleri; r vektör sayısıdır. $k_1,\dots,k_r$ ise bu vektörleri kaç kat alacağımızı belirleyen gerçel sayılardır. k'lar birer bilinmeyendir; "0 çıkan sonuç vektörü" ile "0 seçilen bütün katsayılar" aynı şey değildir.

Trivial solution / aşikâr çözüm: $k_1=\cdots=k_r=0$. Her vektör kümesinde mümkündür, çünkü 0 ile çarpılan her vektör sıfırdır. **Nontrivial solution / aşikâr olmayan çözüm:** en az bir k sıfır değildir ama toplam yine sıfır vektördür. Böyle bir ilişki varsa vektörler bağımlıdır. Bağımsızlık, sıfır toplamın hiçbir şekilde yapılamaması değil, yalnız aşikâr yolla yapılabilmesidir.

Kaynak bu ortak vektör uzayını V ile adlandırır. Burada $V=\mathbb{R}^m$ düşünebiliriz: m bileşenli bütün gerçel vektörlerin kümesi. Aynı boyutlu vektörleri toplamak veya gerçel sayıyla çarpmak yine bu kümede bir vektör verir. Soyut vektör uzayının bütün aksiyomlarını bu ünitede yeniden kurmuyoruz; kullanılan nesneler sonlu bileşenli gerçel vektörlerdir.

$$k_1v_1 + \cdots + k_rv_r = 0$$

Back to English

Rows and columns are two views of the same matrix

i. satır $r_i=[a_{i1},\dots,a_{in}]$ biçiminde bir satır vektörüdür. j. sütun $c_j=[a_{1j},\dots,a_{nj}]^T$ biçiminde bir sütun vektörüdür. Kaynakta satırlar v_i' ile yazılmıştır; üstteki kesme transpozu gösterir.

Ax ifadesi sütun açısından $x_1c_1+\cdots+x_nc_n$'dir: x'ler sütunları ağırlıklandırır. Satır açısından her satır bir denklem üretir. Buradaki "kare + bağımsızlık + terslenebilirlik" eşdeğerliği standart sonlu-boyutlu doğrusal cebir sonucudur; genel n için tam ispat bu notlarda verilmez. Aşağıda 2×2 durumunun nedenini doğrudan eleme ile göstereceğiz; tek sayısal örneği genel teoremin ispatı diye sunmayacağız.

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ independent rows $\Leftrightarrow$ independent columns $\Leftrightarrow A^{-1}$ exists

Back to English

A determinant is one number, not another matrix

Determinant matristen hesaplanan tek gerçel sayıdır. 2×2 için ana köşegen çarpımından diğer köşegen çarpımı çıkarılır. 3×3 için bu ünitede minör-kofaktör açılımını kullanacağız.

det(A)≠0 ise Ax=d her d için tam bir cebirsel çözüme sahiptir. det(A)=0 ise sistemin bu verilen d altında ya hiç çözümü yoktur ya sonsuz çözümü vardır; "sıfır determinant her zaman çözümsüz" değildir. Bu ifadeler burada gerçel değişkenli kare doğrusal sistemler içindir.

For $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Back to English

"Not all zero" is the crucial test

Bir tane karşıörnek bağımsızlığı çürütür: örneğin $-2v_1+0v_2+v_3=0$ ilişkisinde $(-2,0,1)$ tümü sıfır değildir. Ortadaki 0 sorun değildir; her katsayının sıfırdan farklı olmasını istemiyoruz.

Bağımsızlığı kanıtlarken sadece $(0,0,\dots,0)$ çözümdür demek yetmez; bunun **tek** çözüm olduğunu göstermelisin. "Sıfır çözümünü buldum, demek bağımsız" hatası her bağımlı kümeyi de yanlışlıkla bağımsız saydırır.

Back to English

Geometry: a different arrow can carry the same direction

Kaynak şekli orijinden güneydoğuya (1,−2), kuzeybatıya (−2,4) oklar gösterir. Okların uzunlukları ve yön işaretleri farklı olsa da ikisi aynı doğru üzerindedir. Negatif katsayı yönü ters çevirir; yeni bağımsız doğrultu üretmez.

İki boyutta bağımsız iki sütun, düzlemin iki ayrı doğrultusunu belirler. 2×2 determinant sıfırsa bu iki sütunun oluşturduğu paralelkenarın alanı sıfır olur. Bu geometrik açıklama yardımcı sezgidir; hesapta bağımlılık ilişkisini veya determinantı açıkça doğruluyoruz.

$v_2 = -2v_1 \Rightarrow 2v_1+v_2 = 0$

Back to English

Nonzero does not mean positive, large, stable or feasible

det(A)=−9 da det(A)=+9 da sıfırdan farklıdır; ikisi de kare sistem için tek cebirsel çözüm koşulunu sağlar. Determinantın sayısal büyüklüğü seçilen ölçü birimlerinden de etkilenir; “daha büyük determinant daha iyi ekonomi” yorumunu yapamayız.

Ekonomik uygunluk ayrıca x’in işaretleri, birimleri ve model kısıtlarıyla kontrol edilir. Örneğin negatif üretim miktarı, benzersiz bir cebirsel çözüm olsa da bu üretim hikâyesinde uygulanamaz. Statik denklemden zaman içindeki yakınsama ispatı da çıkmaz.

Back to English

Minor versus cofactor

Önce satır ve sütunu silerek kalan 2×2 matrisi bul. Sonra onun determinantını hesapla: bu M_{ij} minörüdür. Ardından +/− işaret desenini uygula: bu C_{ij} kofaktörüdür.

Minörün sayısal sonucu zaten negatif olabilir. Örneğin $M_{12}=-6$ ise $C_{12}=-(-6)=+6$. “Eksi konumdaki minör negatif olmalı” yanlıştır; eksi konum hesaplanan minörün işaretini çevirir. Kofaktörü kullanıyorsan açılımda ayrıca ikinci kez dama işareti ekleme.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}; \qquad \text{sign pattern} \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Back to English

ME-06-C1 Question support

Tüm katsayıların mı, en az birinin mi sıfırdan farklı olması gerekiyor?

Return to foundations

ME-06-C2 Question support

Aynı katsayıları koruyup sağ tarafı değiştirdiğinde tutarlılık değişebilir.

Return to foundations

ME-06-C3 Question support

Kofaktör işareti (−1)^(i+j); i=2 sabit.

Return to foundations

ME-06-C4 Question support

Cebirsel tekillik/tek çözüm ile üretim miktarının uygulanabilirliğini ayır.

Return to foundations

Testing a nontrivial combination

Bağımsızlık tanımını k katsayıları için çözülebilen bir sisteme dönüştür.

$k_1v_1+\cdots+k_rv_r=0$

Vektörlerin kendi girişleri verilidir; aradığımız vektörleri birleştiren k katsayılarıdır. Bu sistemi çözerken asıl ekonomik modelin x'leriyle karıştırma.

$k_1=\cdots=k_r=0$ is always a solution

Bu adım bağımsızlık kanıtı değildir. Sıfır çözüm bütün vektör kümelerinde vardır; ek çözüm olup olmadığını araştırmalıyız.

If some $k_j\neq0$, then $v_j=-\Sigma_{i\neq j}(k_i/k_j)v_i$

En az bir katsayı sıfırdan farklıysa o vektörü yalnız bırakabiliriz. Önce her iki taraftan diğer terimleri çıkarırız; sonra yalnız sıfırdan farklı olduğu bilinen k_j'ye böleriz. Böylece bir vektörün diğerlerinin doğrusal bileşimi olduğu görülür.

Only all-zero coefficients ⇒ independent; at least one nontrivial relation ⇒ dependent

Bir vektörün diğerlerinden kurulabildiği durumda yeni bağımsız bilgi vermez. Katsayı vektörlerinin çözüm kümesi yalnız sıfırsa böyle bir yeniden kurma mümkün değildir.

Back to English

Why the 2 × 2 determinant appears in elimination

2×2 durumda tek çözüm koşulunu doğrudan cebirden gör; herhangi bir tek girişe bölmek zorunda değilsin.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=d_1;\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=d_2$

a_{ij} verilen katsayılar, x_1,x_2 bilinmeyenler, d_1,d_2 verilen sabitlerdir. Henüz hiçbir katsayının tek başına sıfırdan farklı olduğunu varsaymadık.

$a_{22}(a_{11}x_1+a_{12}x_2) - a_{12}(a_{21}x_1+a_{22}x_2) = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

Her denklemin iki tarafını aynı katsayıyla çarpıyoruz; sonra eşitlikleri çıkarıyoruz. Bu işlem x_2 katsayılarını aynı hale getirip yok etmeyi amaçlar. Çarpma için katsayıların sıfır olmaması gerekmez.

$a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2-a_{12}a_{21}x_1-a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

İkinci parantezin önündeki eksi hem x_1 hem x_2 terimine uygulanır. İki x_2 terimi tam zıt olduklarından sıfırlanır.

$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

Δ burada determinantın kısa adıdır. İki köşegen çarpımının farkı, eliminasyon sonunda x_1'in katsayısı olarak ortaya çıktı; ezberden eklenen bir sayı değil.

$\Delta x_2=a_{11}d_2-a_{21}d_1$

İşlem $a_{11}\times$(ikinci denklem) $- a_{21}\times$(birinci denklem): x_1 terimleri $a_{11}a_{21}-a_{21}a_{11}=0$; x_2 terimleri $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\Delta$ kalır.

If $\Delta\neq0$: $x_1=(a_{22}d_1-a_{12}d_2)/\Delta;\ x_2=(a_{11}d_2-a_{21}d_1)/\Delta$

Sıfıra bölme yapılmaz. $\Delta\neq0$ koşulu bu bölmeyi yasal kılar. Bulunan değerlerin özgün iki denklemi sağladığı yerine koyarak kontrol edilir; tek çözüm koşulunun 2×2 cebirsel gerekçesini gördük. Bu, sonraki ünitenin Cramer yönteminin temelindeki mekanizmadır.

If $\Delta=0$, do not divide: $0\cdot x_1 = a_{22}d_1-a_{12}d_2$

Sağ taraf sıfır değilse çelişki oluşur. Sağ taraf da sıfırsa bu eleme satırı 0=0 der; diğer denklemleri de kontrol etmeden belirli bir çözüm yazılmaz. Tekil kare sistem tutarlıysa en az bir serbestlik kalır ve sonsuz gerçel çözüm bulunur.

Back to English

Computing a 3 × 3 determinant by cofactors

Laplace açılımını bir algoritma olarak düzgün uygula; burada genel n-boyutlu determinant teoreminin tam ispatını yaptığımızı iddia etmiyoruz.

$M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

Kalan girişler [[a_{22},a_{23}],[a_{32},a_{33}]]. Minör, bu matrisin kendisi değil determinantıdır. İki köşegen çarpımının farkını al.

$M_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$; $M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

M_{12} için kalan [[a_{21},a_{23}],[a_{31},a_{33}]]; M_{13} için [[a_{21},a_{22}],[a_{31},a_{32}]]. Silinen sütunun elemanını yanlışlıkla içeride bırakma.

$C_{11}=M_{11}$; $C_{12}=-M_{12}$; $C_{13}=M_{13}$

$C_{ij}=(-1)^{(i+j)}M_{ij}$. Birinci satırdaki üsler 2,3,4: çift, tek, çift. Minörün kendi negatif işaretini ayrıca koru.

$\det(A)=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13} = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$

Kofaktör ile yazılan toplamda bütün bağlantı işaretleri artıdır; eksi zaten C_{12} içindedir. Minörle yazınca +−+ deseni açık görünür. Bu iki gösterimi karıştırıp eksi işaretini iki kez uygulama.

$\det(A)=-a_{21}M_{21}+a_{22}M_{22}-a_{23}M_{23} = a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}$

Kaynak ikinci satır açılımını ayrıca verir. M_{21} için kalan [[a_{12},a_{13}],[a_{32},a_{33}]]; M_{22} için [[a_{11},a_{13}],[a_{31},a_{33}]]; M_{23} için [[a_{11},a_{12}],[a_{31},a_{32}]]. Çok sıfırlı satır/sütunu seçmek işi azaltır; terim 0×kofaktör ise toplam katkısı sıfırdır.

$\det(A)=\Sigma_{j=1}^{3} a_{ij}C_{ij}$ or $\Sigma_{i=1}^{3} a_{ij}C_{ij}$

İlk toplam bir satır açılımıdır: i sabit, j değişir. İkincisi sütun açılımı: j sabit, i değişir. Aynı açılımda farklı satır ve sütunlardan rastgele üç terim seçilemez.

Back to English

Source examples: row vectors and dependent rows

Kaynakta satır vektörü işareti v_i'; burada aynı yönü koruyarak r_i de diyebiliriz.

Source PDF pages 28-31

$r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$; $A = [r_1; r_2; \ldots; r_n]$

Noktalı virgül satırları alt alta yerleştirmeyi anlatır. i. satırdaki bütün girişlerin ilk alt indisi i kalır; ikinci alt indis 1'den n'ye gider. Kaynak pp28-30'da bu satır ayrıştırması verilmiştir.

$$r = [1,2,3];\ \ r \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1+2x_2+3x_3$$

Üç giriş, üç bilinmeyenin katsayılarıdır. Sadece bu satırdan üç bilinmeyenin değerlerini bulamayız. Kaynaktaki küçük vektör çiziminde (4,2) noktası, orijinden 4 birim sağa ve 2 birim yukarı giden iki bileşenli vektörü gösterir; bu ayrı bir geometrik örnektir.

$$v= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix};\ \ v^T=[4,2]$$

İlk koordinat yatay, ikincisi dikey bileşendir. Bu çizim kaynakta bağımsızlık konusuna giriş içindir; tek bir okun çizilmesi çok vektörlü bir bağımsızlık testi yapıldığı anlamına gelmez.

$$A= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix};\ \ r_1=[3,4,5],\ r_2=[0,1,2],\ r_3=[6,8,10]$$

Her satırı sırayla ayrı bir vektör olarak okuyalım. Üçüncü satırın birinciyle oranlarını karşılaştır: $6=2\times3$, $8=2\times4$, $10=2\times5$.

$r_3=2r_1 \Rightarrow r_3-2r_1-0r_2=0 \Rightarrow (k_1,k_2,k_3)=(-2,0,1)$

Katsayıların hepsi sıfır değil; k_2'nin sıfır olması kabul edilir. Hesap doğrudan $[6-6,8-8,10-10]=[0,0,0]$ verir. Bir tek böyle ilişki bağımlılık için yeterlidir.

$r_1 = (1/2)r_3 - 0r_2$

Kaynak p31'de ilişki ters yönde de yazılır. 2 sıfırdan farklı olduğu için ikiye bölmek mümkündür. Kare A'nın satırları bağımlı olduğundan A tekildir; sağ taraf d verilmediği için belirli bir Ax=d'nin tutarlılığı hakkında sayı uydurmuyoruz.

Kaynak okuma notu - PDF 31

Kısa özet satırındaki bağımsızlık-aşikâr olmayan çözüm eşleştirmesi hatalıdır. p30'daki ayrıntılı tanım ve p31'in kendi sayısal örneğiyle tutarlı doğru ifade: bağımsızlıkta yalnız sıfır katsayılar; bağımlılıkta en az bir sıfır olmayan katsayı vektörü vardır.

Back to English

Source example: the homogeneous system at the top of p. 32

Kaynak yalnız “homogeneous system” diye işaretliyor; burada örneği tamamlayıp sıfır çözümün gerçekten tek olup olmadığını kontrol ediyoruz.

Source PDF pages 32

$$x+y+z=0;\ 2x-3y+z=0;\ -x+2y-4z=0$$

Homojenlik denklemin sabitler sütununun sıfır olmasıdır; katsayıların sıfır olması değil. Şimdi bu örnekte başka çözüm var mı diye araştırıyoruz.

$$x=-y-z$$

İlk denklemde x’i yalnız bıraktık. İki taraftan aynı y+z ifadesini çıkarıyoruz; işaret değişimi bu işlemin sonucudur.

$$2(-y-z)-3y+z=0 \Rightarrow -2y-2z-3y+z=0 \Rightarrow -5y-z=0 \Rightarrow z=-5y$$

2 parantezin her terimini çarpar; y terimleri −5y, z terimleri −z olur. Her iki tarafa z ekleyince z=−5y elde edilir.

$$-(-y-z)+2y-4z=0 \Rightarrow y+z+2y-4z=0 \Rightarrow 3y-3z=0 \Rightarrow y=z$$

Başta eksi, parantezdeki iki eksi işaretini de artıya çevirir. 3y=3z ve 3≠0 olduğundan y=z.

$$y=z=-5y \Rightarrow 6y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow x=0$$

y=−5y eşitliğinin iki tarafına 5y ekledik: 6y=0. 6’ya bölünce y=0; diğer değişkenler yerine koymayla sıfır olur. Bu örneğin katsayı sütunları bağımsızdır.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 1(12-2)-1(-8+1)+1(4-3)=10+7+1=18\neq 0$$

Birinci satırdan açtık. $M_{11}=(-3)(-4)-1\times 2=10$; $M_{12}=2(-4)-1(-1)=-7$; $M_{13}=2\times 2-(-3)(-1)=1$. Sonuç 18, dolayısıyla yalnız sıfır çözüm bulunmasıyla tutarlı.

Back to English

Source example: two opposite-direction vectors

Kaynak vektörleri aynı doğru üzerindedir; katsayı sisteminin bütün çözümlerini bul.

Source PDF pages 32-33

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix};\quad v_2=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix};\quad v_1^T=[1,-2],\ v_2^T=[-2,4]$$

Transpoz yalnız yazım yönünü değiştirir; doğrusal ilişki aynı kalır. v_2'nin her girişi v_1'in -2 katıdır.

$$v_2=-2v_1 \Rightarrow v_2+2v_1=0$$

$2\times[1,-2]+[-2,4]=[2-2,-4+4]=[0,0]$. (2,1) katsayılarının ikisi de sıfırdan farklı; bağımlılık kanıtlandı.

$$k_1v_1+k_2v_2=0 \Rightarrow k_1-2k_2=0;\ -2k_1+4k_2=0$$

İlk koordinat $k_1\times1+k_2\times(-2)$; ikinci koordinat $k_1\times(-2)+k_2\times4$. Sonuç vektörünün sıfır olması her koordinatın sıfır olması demektir.

$$k_1=2k_2;\ -2(2k_2)+4k_2=0 \Rightarrow 0=0$$

İkinci denklem birincinin -2 katıdır. Bu nedenle k_2 için tek bir sayı seçtirmez; bir serbest katsayı vardır.

$$k_2=t,\ k_1=2t\ (t\in\mathbb{R});\ t=0 \text{ gives } (0,0),\ t=1 \text{ gives } (2,1)$$

t herhangi bir gerçel sayı. t=0 aşikâr; $t\neq0$ aşikâr olmayan çözüm verir. Bağımlı vektörlerin de sıfır katsayı çözümü vardır; ayırıcı nokta ek çözümlerin bulunmasıdır.

$$v_1=(1,-2)^T \text{ points southeast; } v_2=(-2,4)^T \text{ points northwest on the same line}$$

Bir vektörün diğerinin negatif katı olması yönü tersine çevirir. Oklar farklı oldukları halde doğrusal bağımlıdır. "Farklı vektör = bağımsız vektör" yanılgısını bu şekil açıkça çürütür.

Kaynak okuma notu - PDF 32

Kaynağın alt satırındaki tek artı işareti düzeltilmiştir. Vektörün ilk bileşeni $1k_1+(-2)k_2$ olduğundan doğru denklem $k_1-2k_2=0$'dır. Bağımlılık sonucu değişmez; doğru gerekçeyle elde edilir.

Back to English

Source example: a nonzero 2 × 2 determinant

Kaynak p34'te determinant ve tek çözüm bağlantısı veriliyor. Aşağıda kesirli çözümünü de tamamlıyoruz; bu soyut örneğe verilmemiş bir iktisadi hikâye eklemiyoruz.

Source PDF pages 33-34

$$2x+5y=13;\ x-3y=-3 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, d=\begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix}$$

İkinci satırdaki y katsayısı −3, sağ taraf da −3. Aynı sayı olması iki konumun anlamını aynı yapmaz.

$$\det(A)=2(-3)-5(1)=-6-5=-11\neq 0$$

Sonuç negatif ama sıfır değil. A tekil değildir; A^{-1} vardır; satırları ve sütunları bağımsızdır; Ax=d'nin tek cebirsel çözümü vardır. Bu eşdeğerlikler kaynak p33-34'te listelenir.

$$x=3y-3;\ 2(3y-3)+5y=13$$

x−3y=−3 denkleminden x=3y−3. İlk denklemde x'in tamamı yerine parantezli ifadeyi koyuyoruz.

$$6y-6+5y=13 \Rightarrow 11y-6=13 \Rightarrow 11y=19 \Rightarrow y=19/11$$

Her cebir işlemi eşitliği korur. 6y+5y=11y; sağ tarafa 6 ekleyince 13+6=19. Bu 11, determinantın işaret değiştirmiş değeriyle uyumludur.

$$x=3(19/11)-3=57/11-33/11=24/11$$

3 sayısını 33/11 olarak yazdık, çünkü aynı paydayla çıkarma yapıyoruz. Sonuç x=24/11.

$$2(24/11)+5(19/11)=143/11=13;\ 24/11-3(19/11)=-33/11=-3$$

İki sağ taraf da tam elde edildi. Tek çözüm, kesirli olamaz demek değildir. Bu örnekte x ve y için ölçü birimi ya da ekonomik alan kısıtı verilmedi; yalnız cebirsel sonucu raporlarız.

Back to English

Source example: the third-order determinant, two ways

Birinci satır ve ikinci sütun açılımlarını ayrı hesaplayarak işaretleri denetle.

Source PDF pages 35

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

A kare 3×3. Üçüncü satırın son sayısı 9. Sonucun işaretine peşinen karar vermeden minörleri hesapla.

$$M_{11}=\det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}=5\cdot 9-6\cdot 8=45-48=-3$$

Silinen birinci satır ve birinci sütundan hiçbir giriş minörde kalmaz. Kalan 2×2 determinant −3.

$$M_{12}=\det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}=4\cdot 9-6\cdot 7=36-42=-6$$

Bu −6 minördür; $C_{12}=(-1)^3(-6)=+6$ olur. İşaret değişimini açık tut.

$$M_{13}=\det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}=4\cdot 8-5\cdot 7=32-35=-3$$

Birinci satırın üçüncü konumu artıdır; $C_{13}=M_{13}=-3$. Kofaktörün kendisi negatif olabilir.

$$\det(A)=2M_{11}-1M_{12}+3M_{13}=2(-3)-1(-6)+3(-3)=-6+6-9=-9$$

Orta terimde eksi ile negatif minör çarpımı +6 olur. Sonuç −9; kaynak sonucu doğru. “Mutlak değer çubukları var, sonuç pozitif olmalı” diye +9 yapmayız.

$$M_{22}=\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}=18-21=-3;\quad M_{32}=\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}=12-12=0$$

İkinci sütunu seçtiğimiz için M_{12}, M_{22}, M_{32} gerekir. Sütun aşağı inerken kofaktör işaretleri −,+,− olur.

$$\det(A)=-a_{12}M_{12}+a_{22}M_{22}-a_{32}M_{32} = -1(-6)+5(-3)-8(0)=6-15-0=-9$$

Notlardaki ikinci kontrol bu açılımdır. Kendi ayrı hesapların aynı sonucu vermezse öncelikle silinen satır/sütunu ve kofaktör işaretlerini kontrol et.

$\det(A) = -9 \neq 0 \Rightarrow$ A is nonsingular; A^{-1} exists; rows/columns are independent

Bu sayfada belirli d vektörü verilmediği için x'in sayısal değerleri hesaplanamaz. Kaynakta verilen sonuç tersin varlığı ve bağımsızlıktır. Üretim, fiyat veya kâr hakkında ek yorum yapmak için etiketli bir model gerekir.

Back to English

ME-06-W1 Worked example support

x ve y gerçel ve ekonomik olarak sıfırdan küçük olmayan üretim miktarları olmalı. "Tam kullanma" koşulu kaynakların tümünün eşitlikle kullanılmasıdır; en fazla kullanma (≤) koşulu değildir. İki senaryoda A değişmez; yalnız d'nin ikinci girişi değişir. Dolayısıyla tek çözüm koşulunun değişip değişmeyeceğini hesap yapmadan tahmin et.

$$2x+y=100;\ x+2y=80;\ A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ d=\begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Birinci satır kg: 2 kg/adet×x+1 kg/adet×y=100 kg. İkinci satır saat: 1 saat/adet×x+2 saat/adet×y=80 saat. Aynı satır içindeki terimler aynı birimde; satırlar farklı kaynakları anlatır.

$$\det(A) = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

İki ürünün girdi bileşimleri orantılı değil; iki kaynak dengesi bağımsız kısıtlar verir. Bu yalnız tek cebirsel çözüm garantisidir, pozitiflik kontrolünü henüz yapmadık.

$$2(x+2y) = 2(80) \Rightarrow 2x+4y = 160$$

Denklemin iki tarafını aynı 2 ile çarptık. Yeni denklem öncekiyle eşdeğerdir. Amaç x'i bir sonraki çıkarma işleminde yok etmektir.

$$(2x+4y) - (2x+y) = 160 - 100 \Rightarrow 3y = 60 \Rightarrow y = 20$$

Sol tarafta $2x-2x=0$, $4y-y=3y$. Sağda 60. $3 \neq 0$ olduğundan $y=20$.

$$x + 2(20) = 80 \Rightarrow x + 40 = 80 \Rightarrow x = 40$$

x'i bulmak için artık tek denklem yeterli. Yine de son kontrolü her iki orijinal denklemde yapacağız.

$$2(40)+20 = 100 \text{ kg};\ 40+2(20) = 80 \text{ hours};\ x, y \geq 0$$

40 adet ürün 1 ve 20 adet ürün 2 hem kaynak eşitliklerini hem üretim miktarlarının negatif olmaması koşulunu sağlar. Bu planın kârı veya talebi karşılayıp karşılamadığı verilmedi.

New $d = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix}$; $\det(A)=3$ still

Teknoloji aynı; A’nın dört katsayısı değişmedi. Dolayısıyla tek çözüm özelliği devam eder. Buradan yeni çözümün pozitif olduğu çıkarılamaz.

$2(x+2y)-(2x+y)=40-100 \Rightarrow 3y=-60 \Rightarrow y=-20$

İki kat yeni ikinci denklemin sağ tarafı 40; ilk denklemin 100’ünü çıkarınca −60 kalır. Yine 3’e böleriz.

$x+2(-20)=20 \Rightarrow x-40=20 \Rightarrow x=60$

İki tarafa 40 ekledik. Cebirsel çözüm (60,−20).

$2(60)-20=100$; $60+2(-20)=20$; $y<0$

Kontrol sonucunun doğru olması ekonomik uygunluğu otomatik sağlamaz. $y=-20$ bu üretim hikâyesinde uygulanamaz. Dolayısıyla verilen tam-kullanım hedefleri için negatif olmayan üretim planı yoktur. Kapasite eşitsizlikleriyle kurulmuş başka bir modelin sonucunu burada iddia etmiyoruz.

For $x,y\geq 0$: $2x+y \leq 2x+4y = 2(x+2y)$. If labour use is 20, material use ≤ 40, not 100.

Birinci ürün saat başına 2 kg, ikinci ürün saat başına 1/2 kg tüketir. Negatif olmayan bir karışım bu oranların dışına çıkamaz. Eşitsizliği doğrudan da görebiliriz: $y\geq 0$ ise $y\leq 4y$, dolayısıyla $2x+y\leq 2(x+2y)$. 20 saat emekle bu teknolojide en fazla 40 kg malzeme kullanılır. 100 kg’ı da tam kullanma hedefinin neden imkânsız olduğunu bu oran açıklıyor; negatif y yalnız bu çelişkinin cebirsel belirtisidir.

İki senaryoyu karşılaştır: determinant değişmediği halde ekonomik uygunluk neden değişti? Cebirsel çözümün varlığını, negatif olmayan tam-kullanım planının varlığından ayır.

Return to the worked example

ME-06-S1 Question support

İki ürün sütunu, iki kaynak satırı var. Üretim miktarları ekonomik olarak $x_1,x_2\geq 0$ olmalı. Önce determinantı hesapla; sonra tek çözümün bu işaret koşulunu karşılayıp karşılamadığını denetle.

Üretim planını birimleriyle yorumla; tek çözüm ile kâr maksimizasyonunu ayır.

Return to the problem

ME-06-S2 Question support

Her iki satır saat/adet biriminde ama farklı makineleri anlatıyor. Birinci makinenin kullanım katsayıları ikinci makinenin tam iki katı. Bu oran sağ taraflarda da sağlanıyor mu? Ürünlerin bölünebilir olduğunu varsaydığımız için üretim miktarları gerçel olabilir.

İki senaryoda değişen d ile değişmeyen A’yı ayır. Birinde neden çok plan, diğerinde neden hiçbir plan yok?

Return to the problem

ME-06-S3 Question support

Sıfırlı girişleri kullanmak işi azaltır. Önce minör ve kofaktörü ayır; ikinci satırın dama işaretlerini kendin yaz. Sonra üç değişkeni çöz. Bu model statik kaynak eşitlikleridir; zaman içindeki ayarlama süreci verilmedi.

Determinantın sağladığı sonuçla üretim işaretlerinin kontrolünden çıkan sonucu ayrı yaz; modelin söylemediği bir şeyi belirt.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-06-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-06-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-06-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-06-S1

Multiply the second balance by 3 and subtract the first to eliminate x_1.

Denklemler $3x_1+x_2=80$ ve $x_1+2x_2=70$. 3×ikinci eksi birinci işlemi x_1'i yok eder.

Return and complete your attempt

ME-06-S2

Compare row 1 with twice row 2, then compare d_1 with $2d_2$.

Katsayı bağımlılığı aynı kalır. İlk durumda $12=2\times6$; ikinci durumda 12 ile 2×7'yi karşılaştır.

Return and complete your attempt

ME-06-S3

For row 1, $M_{11}=6$ and $M_{12}=-1$. In row 2 the signs are $-,+,-$, not $+,-,+$.

Birinci denklem $x_2=40-2x_1$; ikinci denklem $x_3=75-3x_2$ verir. Bunları üçüncü denklemde kullan.

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-06-W1 Model interpretation

With the original resource targets, the unique plan produces 40 units of product 1 and 20 of product 2 and exactly uses both resources. The revised targets still have a unique algebraic solution because A and its nonzero determinant are unchanged, but the solution requires −20 units of product 2. Hence no nonnegative production plan can meet both revised exact-use equalities; this does not establish anything about a different model that allows unused capacity or maximizes profit.

İlk senaryoda (40,20) üretim planı uygulanabilir. İkincide (60,−20) tek cebirsel çözümdür; negatif üretim kabul etmediğimiz için ekonomik olarak uygulanabilir çözüm yoktur. Bir sistemin “tek çözümü var” demek, yalnız eşitliklerin belirlediği sayı vektörü hakkında konuşur; x,y≥0 kısıtını ayrıca eklemek gerekir.

Bu değişim teknolojiden değil, hedef kaynak oranının değişmesinden geldi. İkinci ürünü negatif üretmek gerçek bir çözüm değildir. Fakat “firma hiçbir şey üretemez” de demiyoruz: tam kullanım yerine bazı kaynağın boş kalmasına izin veren başka bir model farklı sonuç verebilir.

Check the explanation

☐ Identifies the first nonnegative production mix and verifies both resource totals.

☐ States that the determinant stays nonzero because technology A is unchanged.

☐ Explains the negative second-scenario output as a failure of the nonnegative exact-use model, not failure of algebraic uniqueness.

☐ Does not infer profit, optimality or dynamic stability.

ME-06-S1 Solution

$$\det(A)=3\cdot 2-1\cdot 1=6-1=5\neq 0$$

The two columns and rows are independent; a unique real solution exists.

A kare ve determinant sıfır değil; bu nedenle tekil olmayan matris. Çıktı işaretlerini henüz kontrol etmedik.

$$3x_1+x_2=80;\ 3x_1+6x_2=210$$

Multiply the second original balance by 3.

İlk denklemi değiştirmedik. İkinci denklemde bütün katsayıları ve sağ tarafı 3 ile çarptık.

$(3x_1+6x_2)-(3x_1+x_2)=210-80 \Rightarrow 5x_2=130 \Rightarrow x_2=26$

Subtract and divide by nonzero 5.

$6x_2-x_2=5x_2$; $210-80=130$; $130/5=26$.

$x_1+2(26)=70 \Rightarrow x_1=70-52=18$

Substitute into the second original equation.

$x_1=18$ elde edilir. Bu adımda hangi denklemi kullandığını açık yaz; kontrol için ikisini de sakla.

$3(18)+26=80$; $18+2(26)=70$; $x_1,x_2\geq 0$

Verify exact material and labour use and feasibility.

$54+26=80$ kg; $18+52=70$ saat. Her iki üretim miktarı da negatif değil.

Model English interpretation

The unique nonnegative plan produces 18 units of product 1 and 26 units of product 2, using exactly 80 kg and 70 labour-hours. Uniqueness is conditional on the stated technology and exact resource-use targets. It does not establish profit maximization because no revenues, other costs or optimization objective are specified.

Türkçe reasoning

Doğrusal bağımsızlık bu iki kaynak eşitliğinin aynı üretim vektörünü yalnız bir kez belirlemesini sağlar. Ancak kârı en büyük yapan planı aramak ayrı bir optimizasyon sorusudur. Burada talep, ürün fiyatları ve amaç fonksiyonu verilmedi.

Check your explanation

☐ Reports the two quantities and correct resource totals.

☐ Conditions uniqueness on this technology and exact-use equalities.

☐ States that prices, demand and objective function are not supplied.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-06-S2 Solution

$\det(A)=2\cdot2-4\cdot1=0$; $r_1-2r_2=[2-2,4-4]=[0,0]$

The coefficient pair $(1,-2)$ is nontrivial, so rows are dependent.

Birinci satır ikinci satırın iki katı; bu bağımlılık iki senaryoda da aynı. Determinant sıfır olduğundan A tekildir.

Case 1: $2x_1+4x_2=12$ is twice $x_1+2x_2=6$

Both equations describe the same restriction.

Sağ taraf da iki kat olduğundan iki satır çelişmez; fakat ikinci bağımsız bilgi sağlamaz.

$x_2=t$; $x_1=6-2t$, $t\in\mathbb{R}$

Every real t gives an algebraic solution; there are infinitely many.

İkinci denklemde $x_2=t$ seçip iki taraftan 2t çıkarırız. Tek serbest parametre kalır. Örneğin t=0 için (6,0), t=1 için (4,1) her iki denklemi sağlar.

$x_2\geq0 \Rightarrow t\geq0$; $x_1\geq0 \Rightarrow 6-2t\geq0 \Rightarrow t\leq3$; hence $0\leq t\leq3$

Impose nonnegative production after solving the equalities.

$6-2t\geq0$ eşitsizliğine 2t ekleyince $6\geq2t$; pozitif 2'ye bölünce $3\geq t$. Bu kapalı aralıkta sonsuz bölünebilir üretim planı var. Tamsayı üretim koşulu verilseydi uygulanabilir küme sonlu olabilirdi.

Case 2: $2(x_1+2x_2)=14$, but equation 1 requires $2x_1+4x_2=12$

The same left-hand side cannot equal both 12 and 14.

Denklemleri çıkarınca $0=-2$ çelişkisi çıkar. Bu durumda hiç gerçel çözüm yok; dolayısıyla negatif olmayan çözüm de yok.

Model English interpretation

The technology forces machine 1 usage to be twice machine 2 usage for every production mix. Targets of 12 and 6 hours respect this ratio and leave a range of nonnegative mixes, whereas targets of 12 and 7 hours violate it and are inconsistent. The change is in the required resource totals, not in the singular coefficient matrix.

Türkçe reasoning

Tekillik iki durumda da var; buna rağmen sonuçları aynı değil. İlkinde aynı bilgi iki kez veriliyor: kullanım oranı tutarlı ama ürün bileşimini tek başına belirlemiyor. İkincide hedef kullanım oranı teknolojinin zorunlu oranıyla uyuşmuyor. Bu nedenle "det=0 ⇒ mutlaka sonsuz çözüm" ve "det=0 ⇒ mutlaka çözümsüz" genellemelerinin ikisi de yanlış.

Check your explanation

☐ Technology/row dependence is unchanged.

☐ Case 1 exact targets obey the fixed 2:1 machine-use ratio, so many mixes remain.

☐ Case 2 violates that ratio and cannot be met by any mix.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-06-S3 Solution

Row 1: $\det(A)=2(3\cdot2-1\cdot0)-1(0\cdot2-1\cdot1)+0=2(6)-1(-1)=13$

Compute minors and apply +,−,+.

$M_{12}=-1$ olduğu için orta katkı $-1\times(-1)=+1$. Son terim sıfır katsayılı olduğundan katkısı sıfır.

$$M_{21}=\det\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=2;\ M_{22}=\det\begin{bmatrix}2&0\\1&2\end{bmatrix}=4;\ M_{23}=\det\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}=-1$$

Delete row 2 and each selected column.

Minörler sırasıyla 2,4,−1. Bu sayılara ayrıca ikinci satırın −,+,− kofaktör işaretlerini uygulayacağız.

Row 2: $\det(A)=-0(2)+3(4)-1(-1)=0+12+1=13$

The student’s +,−,+ pattern would incorrectly negate this row expansion.

Doğru ikinci satır işaretleri −,+,−. Yanlış desen burada −13 üretirdi; iki açılımın uyuşmaması işaret hatasını yakalar.

$2x_1+x_2=40 \Rightarrow x_2=40-2x_1$

Use the first resource equation.

Her iki taraftan $2x_1$ çıkararak x_2’yi yalnız bıraktık.

$3x_2+x_3=75 \Rightarrow x_3=75-3(40-2x_1)=75-120+6x_1=6x_1-45$

Substitute x_2 into the second balance and distribute −3.

−3 parantezin her terimini çarpar: $-120+6x_1$. İkinci eksi işaretini kaçırmak x_1 katsayısını yanlış yapar.

$x_1+2x_3=40 \Rightarrow x_1+2(6x_1-45)=40 \Rightarrow 13x_1-90=40 \Rightarrow x_1=10$

Substitute into the energy balance, add 90, divide by 13.

$13x_1=130$; 13 sıfırdan farklı olduğundan $x_1=10$. Bulduğumuz 13 katsayısı determinantla tutarlıdır.

$x_2=40-2(10)=20$; $x_3=6(10)-45=15$

Recover the other quantities.

Her değişkeni kendi türettiğimiz ifadede yerine koyduk. Artık orijinal üç denklemi de kontrol et.

$2(10)+20=40$ kg; $3(20)+15=75$ hours; $10+2(15)=40$ kWh

All three balances hold, and all quantities are nonnegative.

Kaynak birimlerini ayrı tuttuk. det>0 tek başına pozitif miktar ispatı değildir; bu örnekte pozitifliği çözüme bakarak doğruladık. Statik eşitliklerden dinamik yakınsama sonucu çıkmaz.

Model English interpretation

The unique plan produces 10, 20 and 15 units and exactly uses 40 kg, 75 labour-hours and 40 kWh. The nonzero determinant establishes algebraic uniqueness; checking the resulting nonnegative quantities establishes feasibility for these exact-use targets. The model does not show that this plan maximizes profit or that an adjustment process converges to it.

Türkçe reasoning

“Tek” ve “uygun” iki ayrı denetimin sonucudur: determinant $13\neq0$ tekliği; $x=(10,20,15)\geq0$ ve kaynak eşitlikleri uygunluğu gösterir. Determinantın artı olması üretimlerin artı olmasının gerekçesi değildir. Kâr veya istikrar yorumu için bu modelde olmayan fiyat/amaç ya da zaman dinamiği bilgisi gerekir.

Check your explanation

☐ Reports three output quantities with their verified resources.

☐ Nonzero determinant establishes uniqueness; observed nonnegative quantities establish this solution’s feasibility.

☐ Does not infer profit maximization or dynamic stability.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-06-C1 Answer B

The coefficient vector $(-2,0,1)$ is nonzero, so it is a nontrivial relation.

En az bir katsayı sıfırdan farklı olması yeterli; burada ikisi farklı. Bu ilişki $v_3=2v_1$ olduğunu gösterir. v_2'nin ilişkiye katılmaması kümeyi bağımsız yapmaz.

If you chose differently: "Not all zero" is different from "all nonzero." Test the whole coefficient vector. $(-2,0,1)$ vektörü sıfır vektörü değildir. Bağımlılığı göstermek için bütün katsayıları sıfırdan farklı seçme zorunluluğu yok.

ME-06-C2 Answer C

Singularity rules out a unique real solution; compatible d gives infinitely many, incompatible d gives none.

A tekildir. Gerçel değişkenli kare sistemde det=0 iken tek çözüm olamaz; ancak hiç mi sonsuz mu olduğunu d belirler. Örneğin $x+y=2$ ile $2x+2y=4$ tutarlı; ikinci sağ taraf 5 olursa çelişkilidir.

If you chose differently: Compare $x+y=2$ with either $2x+2y=4$ or $2x+2y=5$.

Katsayılar iki durumda da aynı ve bağımlı. Sağ taraf 4 olursa aynı doğru, 5 olursa paralel ayrı doğru elde edilir. Bu iki olasılığı ayır.

ME-06-C3 Answer B

The row-2 signs are −, +, − because i+j is odd, even, odd.

$2+1=3$ tek ⇒ eksi; $2+2=4$ çift ⇒ artı; $2+3=5$ tek ⇒ eksi. C_{2j} kofaktörlerini zaten hesapladıysan $\det=a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}$ yazarsın.

If you chose differently: Start at + in position (1,1) and alternate across rows and columns.

Dama deseninde bir alt satıra inince başlangıç işareti değişir. Her açılımı +−+ ile başlatmak doğru değildir.

ME-06-C4 Answer B

Uniqueness does not enforce sign restrictions, and the static model supplies no dynamic stability test.

Negatif miktar determinantın sıfır olması gerektiği anlamına gelmez. Matematiksel olarak tek çözüm olabilir ama $x\geq 0$ üretim kısıtı bozulur. Dinamik bir ayarlama denklemi verilmediği için istikrar hakkında hüküm çıkaramayız.

If you chose differently: Ask two separate questions: Is the algebraic solution unique? Is it admissible in this economic story?

Tek çözüm "yalnız bir sayı vektörü denklemleri sağlar" demek; uygulanabilirlik "bu vektör modelin ekonomik kısıtlarına da uyar" demek. Bunlar farklı kontroller.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I distinguish the always-available trivial solution from nontrivial dependence.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I compute 2×2 determinants and 3×3 cofactors with the correct row/column signs.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I distinguish singularity from inconsistency and uniqueness from economic feasibility.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I interpret resource equations without claiming profit, causality or dynamic stability.

Çözüm kapalıyken bağımlılık için bir katsayı örneği üretebiliyor musun? Bağımsızlık için yalnız sıfır katsayılar kaldığını gösterebiliyor musun? Minör ile kofaktörü ayırıp farklı satır/sütun açılımlarını aynı sonuca getirebiliyor musun? Son olarak cebirsel tek çözümü ekonomik kısıtlarla ayrıca kontrol et.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Visually verified pp. 29-35 and independence subsection of p. 28, including a high-resolution reading of p. 32 and photographic p. 35. All exact source examples are separately completed; original economic W1/S1-S3 are clearly distinct. Two source slips are explicitly corrected: p31 independence/nontrivial summary and p32 isolated plus sign in the coefficient equation. General square-matrix equivalences and Laplace expansion are identified as standard results, not falsely proved by a numerical example. Every numerical solution and determinant is independently checked.

ME-07 Inverse Matrix & Economic Applications

Source PDF pages 28 (inverse overview), 36-42

Construct and verify an inverse, solve Ax=d in the correct order, and explain the two-country multiplier without confusing structural slopes with exogenous shocks.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

What does an inverse undo?

A matrix transforms a column vector. An inverse reverses that transformation. It is not the matrix of element-by-element reciprocals.

$AA^{-1}=A^{-1}A=I$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
A	Square coefficient matrix	Kare katsayı matrisi
A^{-1}	Inverse of A	A matrisinin tersi
I	Identity matrix	Birim matris
x	Column vector of unknowns	Bilinmeyenler sütun vektörü
d	Column vector of constants	Sabitler sütun vektörü

Türkçe explanation

Square is necessary, not sufficient

For an ordinary two-sided inverse, A must be square and det(A) must be nonzero. Such a matrix is nonsingular. A square matrix with zero determinant is singular.

A is $n \times n$ and $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ exists

Türkçe explanation

A unique inverse, with the same dimensions

If A is n×n, its inverse is n×n, is unique, and has A as its own inverse. The inverse of a product reverses the order.

$(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Türkçe explanation

From a minor to an adjugate

Delete row i and column j to obtain the minor determinant M_{ij}. Apply the checkerboard sign to form the cofactor C_{ij}. Transpose the complete cofactor matrix to obtain adj(A).

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$; $\text{adj}(A) = C^{T}$; $A^{-1} = \text{adj}(A)/\det(A)$

Türkçe explanation

The two-country economy

Two nations trade only with each other. Each nation’s imports are the other nation’s exports. Income determines consumption and imports; autonomous expenditure is taken as given. The source lists autonomous consumption C_0, investment I_0 and government expenditure G_0 as components/examples of A_i; their exact country-specific decomposition is not separately specified.

$Y_i = C_i + A_i + X_i - M_i$; $C_i = c_i Y_i$; $M_i = m_i Y_i$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
Y_i	National income of country i	i ülkesinin milli geliri
C_i	Consumption expenditure	Tüketim harcaması
A_i	Autonomous expenditure	Otonom harcama
X_i	Exports	İhracat
M_i	Imports	İthalat

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
c_i	Marginal propensity to consume	Marjinal tüketim eğilimi
m_i	Marginal propensity to import	Marjinal ithalat eğilimi

Türkçe explanation

Assumptions, units, and what is endogenous

Assume $0<c_1,c_2<1$ and $0<m_1,m_2<1$, as in the notes. Income, expenditure, exports and imports must use a common currency/value unit and time period. Y_1 and Y_2 are jointly determined.

$$0<c_1,c_2<1;\ 0<m_1,m_2<1$$

Türkçe explanation

Why multiply on the left?

In $Ax=d$, premultiplication gives $A^{-1}Ax=A^{-1}d$. Associativity makes $A^{-1}A$ adjacent. Postmultiplication is not a substitute.

$$A^{-1}(Ax)=(A^{-1}A)x=Ix=x$$

Türkçe explanation

Trade is leakage locally and demand abroad

An extra unit of country 1 income raises its imports by m_1. Those imports are country 2 exports. Country 2 income and imports may then feed demand back to country 1.

$$A_1 \uparrow \rightarrow Y_1 \uparrow \rightarrow M_1=X_2 \uparrow \rightarrow Y_2 \uparrow \rightarrow M_2=X_1 \uparrow$$

Türkçe explanation

A positive determinant is economically useful

The determinant expands into three positive terms. This proves a unique algebraic equilibrium under the stated propensity restrictions, rather than merely assuming one.

$$D=(1-c_1)(1-c_2)+(1-c_1)m_2+m_1(1-c_2)>0$$

Türkçe explanation

Structural slope versus a policy effect

The slope of a structural relation is not automatically the total response to an unspecified change in an endogenous variable. Name the exogenous shock and hold the remaining primitives fixed.

Structural slope: $m_2/(1-c_1+m_1)$; equilibrium response to A_2: m_2/D

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-07-C1

A square matrix has determinant zero. What follows?

A. Every system Ax=d has no solution.

B. The ordinary inverse does not exist; Ax=d may have no solution or infinitely many.

C. Take the reciprocal of every nonzero entry.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-07-C2

For Ax=d with A 3×3 and d 3×1, which expression solves the system when A is invertible?

A. $x=dA^{-1}$

B. $x=A^{-1}d$

C. $x=Ad$

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-07-C3

Why does an increase in country 2 autonomous expenditure raise country 1 income?

A. Country 2 imports become country 1 exports.

B. The two countries necessarily have equal incomes.

C. All imports disappear from national-income accounting.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Inverse properties and the solution formula - source p28

Prove the rules rather than treating them as a list.

Source PDF pages 28

$Ax=d \rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}d \rightarrow Ix=A^{-1}d \rightarrow x=A^{-1}d$

Premultiply both sides, reassociate, then use the identity matrix.

If $AB=BA=I$ and $AC=CA=I$, then $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$.

Any two proposed inverses B and C must be equal.

$A^{-1}A=AA^{-1}=I \rightarrow (A^{-1})^{-1}=A$

The original matrix reverses its inverse.

$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I$; $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$

Check both multiplication orders to justify reversing factor order.

Detailed Turkish reasoning

The complete 3×3 cofactor procedure - pp36-38

Construct all nine cofactors, then transpose once.

Source PDF pages 36-38

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Start with a general square matrix and first check $\det(A)\neq 0$.

$C_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$; $C_{12}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$; $C_{13}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$

Compute the first cofactor row with signs +, −, +.

$C_{21}=-(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})$; $C_{22}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$; $C_{23}=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$

Compute the second cofactor row with signs −, +, −.

$C_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$; $C_{32}=-(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})$; $C_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Compute the last cofactor row with signs +, −, +.

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix};\quad \operatorname{adj}(A)=C^{T}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Turn rows of C into columns of adj(A).

$A^{-1}=C^{T}/\det(A)$; verify $AA^{-1}=I$

Divide every adjugate entry by the same nonzero scalar determinant.

Detailed Turkish reasoning

Build and invert the two-country model - pp41-42

Convert the economic structure into a simultaneous linear system.

Source PDF pages 41-42

$Y_1=c_1Y_1+A_1+m_2Y_2-m_1Y_1$; $Y_2=c_2Y_2+A_2+m_1Y_1-m_2Y_2$

Substitute consumption and bilateral trade into each income identity.

$Y_1-c_1Y_1+m_1Y_1-m_2Y_2=A_1$; $Y_2-c_2Y_2+m_2Y_2-m_1Y_1=A_2$

Move every endogenous-income term to the left.

$(1-c_1+m_1)Y_1-m_2Y_2=A_1;\ -m_1Y_1+(1-c_2+m_2)Y_2=A_2$

Collect the coefficients of each income.

$$K=\begin{bmatrix} 1-c_1+m_1 & -m_2 \\ -m_1 & 1-c_2+m_2 \end{bmatrix};\ K\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

Call the coefficient matrix K to distinguish it from autonomous expenditures A_1,A_2.

$D=\det(K)=(1-c_1+m_1)(1-c_2+m_2)-(-m_2)(-m_1)$

Use ad−bc and keep both off-diagonal negatives.

$D=(1-c_1)(1-c_2)+(1-c_1)m_2+m_1(1-c_2)+m_1m_2-m_1m_2$

Expand the product before cancelling.

$$D=(1-c_1)(1-c_2)+(1-c_1)m_2+m_1(1-c_2)>0;\ K^{-1}=(1/D)\begin{bmatrix} 1-c_2+m_2 & m_2 \\ m_1 & 1-c_1+m_1 \end{bmatrix}$$

Invert K by exchanging diagonal entries and negating the off-diagonal entries.

$Y_1^*=[(1-c_2+m_2)A_1+m_2A_2]/D;\ Y_2^*=[m_1A_1+(1-c_1+m_1)A_2]/D$

Multiply the inverse by the autonomous-expenditure vector to obtain reduced form.

Detailed Turkish reasoning

Comparative effects and the structural-slope question - p42

Differentiate the reduced form with respect to a named exogenous variable.

Source PDF pages 42

$\partial Y_1^*/\partial A_1=(1-c_2+m_2)/D>0;\ \partial Y_2^*/\partial A_1=m_1/D>0$

A_1 is absent from D, so differentiate only the numerators.

$\partial Y_1^*/\partial A_2=m_2/D>0;\ \partial Y_2^*/\partial A_2=(1-c_1+m_1)/D>0$

A_2 raises both incomes through domestic demand and trade.

$(1-c_1+m_1)Y_1=A_1+m_2Y_2 \rightarrow Y_1=(A_1+m_2Y_2)/(1-c_1+m_1)$

Rearrange the first structural relation without solving the second one.

Holding A_1 fixed: slope $dY_1/dY_2=m_2/(1-c_1+m_1)$. Under an A_2 shock: $(dY_1^*/dA_2)/(dY_2^*/dA_2)=m_2/(1-c_1+m_1)$.

A specified experiment explains when the structural slope equals a ratio of equilibrium movements.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

A singular source matrix - p36

Before constructing cofactors, ask whether inversion is possible.

Source PDF pages 36

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Read the three columns as $v_1=(0,1,2)^T$, $v_2=(-1,3,1)^T$, $v_3=(0,2,4)^T$.

$v_3=2v_1 \rightarrow -2v_1+0v_2+v_3=0$

The coefficients $(-2,0,1)$ are not all zero, so the columns are linearly dependent.

$\det(A)=0\cdot(12-2)-(-1)\cdot(4-4)+0\cdot(1-6)=0$

A direct first-row expansion confirms singularity.

Source reading note - PDF 36

In the notes: $v_3=2v_1$ is followed by inconsistent handwritten sample coefficients.

Checked form: $-2v_1+0v_2+v_3=0$; scalar multiples are also valid.

The displayed column relation fixes the coefficient order; use $(-2,0,1)$.

Türkçe source-example reasoning

Two source inverses - pp38-39

The familiar 2×2 shortcut is a condensed cofactor calculation.

Source PDF pages 38-39

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix};\ \det(A)=4\cdot5-3\cdot2=20-6=14$$

The determinant is nonzero, so inversion is allowed.

$$C=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix};\ C^{T}=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

The off-diagonal cofactors exchange positions under transpose.

$$A^{-1}=(1/14)\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix};\ AA^{-1}=(1/14)\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}=I$$

Check all four entries of the product.

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};\ \det(B)=(-1)\cdot2-3\cdot2=-8$$

A negative determinant is not a problem; only zero is forbidden.

$$\text{adj}(B)=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix};\ B^{-1}=\begin{bmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Divide by -8; the source labels the result A^{-1}, but it is the inverse of B.

Source reading note - PDF 39

In the notes: The inverse calculated from B is labelled A^{-1}.

Checked form: It is B^{-1}=[[-1/4,3/8],[1/4,1/8]].

Only the letter label is corrected; the source calculation is retained.

Türkçe source-example reasoning

Solve the exact source system - pp40-41

Source prompt: “Solve the system Ax=d by matrix inversion.” The system is 4x+3y=28, 2x+5y=42.

Source PDF pages 40-41

$$4x+3y=28;\ 2x+5y=42\ \rightarrow\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Keep the variable order x,y fixed in every row.

$$\det(A)=14\neq 0;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(1/14)\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Premultiply the constants vector by the inverse already derived.

$x=(5\cdot 28-3\cdot 42)/14=(140-126)/14=1;\ y=(-2\cdot 28+4\cdot 42)/14=(-56+168)/14=8$

Calculate each row-column dot product, then divide by 14.

$4\cdot 1+3\cdot 8=28;\ 2\cdot 1+5\cdot 8=42$

Both original equations hold.

Source reading note - PDF 41

In the notes: An intermediate matrix line shows +3 instead of −3.

Checked form: The adjugate entry is −3 and the verified result is (x,y)=(1,8).

Retain the negative sign from the inverse; substitution confirms the solution.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-07-W1 A new two-country economy

Two nations trade only with each other. Let $c_1=0.6$, $c_2=0.5$, $m_1=0.2$, $m_2=0.1$, $A_1=80$ and $A_2=40$. Find Y_1^*, Y_2^*, consumption, imports and exports in each nation. Then find the exact changes in both incomes when A_2 rises by 10, holding all other primitives fixed.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$0.6Y_1-0.1Y_2=80;\ -0.2Y_1+0.6Y_2=40$

Calculate $1-c_1+m_1=0.6$ and $1-c_2+m_2=0.6$.

$D=0.6\cdot 0.6-(-0.1)(-0.2)=0.36-0.02=0.34$

The positive determinant ensures a unique equilibrium.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$Y_1^*=(0.6\cdot80+0.1\cdot40)/0.34=52/0.34=2600/17$;
$Y_2^*=(0.2\cdot80+0.6\cdot40)/0.34=40/0.34=2000/17$

Use the reduced-form numerators without rounding.

$C_1=1560/17$; $C_2=1000/17$; $M_1=X_2=520/17$; $M_2=X_1=200/17$

Multiply each income by its own consumption and import propensities.

$Y_1=(1560+1360+200-520)/17=2600/17$; $Y_2=(1000+680+520-200)/17=2000/17$

Check both original income identities.

$\Delta Y_1=(0.1/0.34)\cdot10=50/17$; $\Delta Y_2=(0.6/0.34)\cdot10=300/17$

Use the A_2 column of the inverse for the expenditure shock.

Interpret before reading the model answer

Explain how a rise in country 2 autonomous expenditure affects country 1, and state what the static result does not tell us.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-07-S1 Rebuild an inverse solution

Solve 3x+y=11 and 2x+4y=14 by matrix inversion. Show the determinant, inverse and a substitution check.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-07-S1 Interpretation and verification

Why does a nonzero determinant make this algebraic solution unique, and what should be checked before giving it an economic interpretation?

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-07-S2 Diagnose a false inverse

A student claims that H=[[2,4],[1,2]] has an inverse because it is square. Test the claim. Compare Hx=[6,3]^{T} with Hx=[6,4]^{T} and describe each solution set.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-07-S2 Interpretation and verification

Explain why singularity does not mean that every right-hand side produces no solution.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-07-S3 Interpret a cross-country shock

Let $c_1=c_2=0.5$, $m_1=m_2=0.25$, $A_1=60$ and $A_2=40$. Find both equilibrium incomes. Then increase A_1 by 10. Find ΔY_1 and ΔY_2, and explain why $\partial Y_2^*/\partial A_1$ is not the same object as the conditional slope dY_2/dY_1.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-07-S3 Interpretation and verification

Explain the positive spillover from an A_1 increase and distinguish $\partial Y_2^*/\partial A_1$ from the structural slope dY_2/dY_1.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

What does an inverse undo?

Bir katsayı matrisi, bilinmeyenleri farklı ağırlıklarla birleştirerek denklemlerin sol tarafını oluşturur. Ters matris bu ortak dönüşümü geri alır. Örneğin A^{-1} yazarken her a_{ij} elemanını $1/a_{ij}$ yapmayız; tüm satır ve sütun ilişkilerini dikkate alırız. Birim matris I, çarptığı vektörü değiştirmez; bu yüzden tersin kontrolü çarpımın I olmasıdır.

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

Back to English

Square is necessary, not sufficient

Kare olmak, satır ve sütun sayılarının aynı olmasıdır; tek başına tersin varlığını garanti etmez. Satırlar veya sütunlar arasında doğrusal bağımlılık varsa bilgi tekrarı vardır ve dönüşüm bazı farklı vektörleri ayırt edemez. $\det(A)=0$ iken A^{-1} yöntemi kullanılamaz. Ancak bundan $Ax=d$ için kesinlikle hiç çözüm yok sonucu çıkmaz: sağ tarafa bağlı olarak hiç çözüm veya sonsuz çözüm olabilir.

$$A \text{ is } n\times n \text{ and } \det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A^{-1} \text{ exists}$$

Back to English

A unique inverse, with the same dimensions

Bu özellikler p28 üzerindeki ters matris özetinin tamamlayıcı parçalarıdır. $(A^{-1})^{-1}=A$ çünkü geri alma işlemini geri alırsak ilk dönüşüme döneriz. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ koşulu A ve B aynı boyutta ve terslenebilirken geçerlidir. Sıra rastgele değildir: ABx içinde önce B uygulanır, sonra A; geri dönerken önce A, sonra B geri alınır.

$$(A^{-1})^{-1}=A;\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

Back to English

From a minor to an adjugate

Minör bir matrisin tamamı değil, ilgili satır ve sütun çıkarılınca kalan matrisin determinantıdır. Kofaktörde ek işaret $(-1)^{i+j}$ kullanılır; 3×3 işaret düzeni $+-+$ / $-+-$ / $+-+$ şeklindedir. Kofaktör matrisi C ile adj(A) aynı şey değildir: $\text{adj}(A)=C^{T}$. Notlarda kullanılan “adjoint” sözcüğü burada klasik adjugate anlamındadır; eşlenik transpoz ile karıştırmayın.

$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$; $\text{adj}(A)=C^T$; $A^{-1}=\text{adj}(A)/\det(A)$

Back to English

The two-country economy

Yalnızca iki ülke vardır; üçüncü ülke yoktur. Bu nedenle ülke 1'in ithalatı, ülke 2'nin ihracatıdır: $M_1=X_2$. Benzer biçimde $M_2=X_1$. $C_i=c_iY_i$ tüketim ilişkisini, $M_i=m_iY_i$ ithalat ilişkisini verir. A_i, örneğin otonom tüketim, yatırım ve kamu harcaması gibi gelire bağlı olmayan harcamaları bir araya getirir. A burada katsayı matrisi için de kullanılır; alt indisli A_1,A_2 harcamalardır ve farklı nesnelerdir. Not p41, A_i için C_0,I_0,G_0 bileşenlerini/örneklerini listeler; her ülke için bunların ayrı sayısal dağılımı verilmez.

$Y_i=C_i+A_i+X_i-M_i$; $C_i=c_iY_i$; $M_i=m_iY_i$

Back to English

Assumptions, units, and what is endogenous

c ve m oranları boyutsuzdur; gelir bir parasal akım ölçüsüdür. Harcama büyüklüklerini ortak değer birimi ve aynı dönemle yazmadan denklemler ekonomik olarak karşılaştırılamaz. A_1,A_2 model dışından verilen değişkenler; c_1,c_2,m_1,m_2 verilen parametreler; Y_1,Y_2 birlikte çözülen içsel değişkenlerdir. Pozitif gelir yorumu için ayrıca otonom harcamaların uygun, örneğin pozitif, değerlerde olması gerekir. Bu statik sistem tek başına zaman içindeki yakınsamayı ispatlamaz.

$0<c_1,c_2<1$; $0<m_1,m_2<1$

Back to English

Why multiply on the left?

Önce boyutları görün: A n×n, x ve d n×1 boyutundadır. $A^{-1}d$ tanımlıdır ve n×1 sonuç verir. Buna karşılık dA^{-1}, n>1 iken (n×1)(n×n) olduğundan iç boyutlar 1 ve n uyuşmaz. p28'deki sağdan çarpma denemesi geçerli bir yöntem değil, düzeltilmesi gereken bir yanlış başlangıçtır. Ayrıca matris çarpımı genel olarak değişmeli olmadığından ters matrisi gelişigüzel taşıyamayız.

$A^{-1}(Ax)=(A^{-1}A)x=Ix=x$

Back to English

Trade is leakage locally and demand abroad

Bir ülkenin ithalatı kendi iç talebi açısından sızıntıdır; fakat ticaret ortağı açısından ihracat talebidir. A_1 artarsa Y_1 yükselir; $M_1=m_1Y_1$ artışı X_2'yi artırır; böylece Y_2 yükselir. Y_2 artınca $M_2=X_1$ de artar ve ülke 1'e geri dönüş olur. Çözdüğümüz denge formülü bu karşılıklı etkileri birlikte içerir. Bu anlatım, bağımsız bir zaman uyarlama kuralı verilmediği için dinamik istikrar kanıtı değildir.

$$A_1 \uparrow \rightarrow Y_1 \uparrow \rightarrow M_1=X_2 \uparrow \rightarrow Y_2 \uparrow \rightarrow M_2=X_1 \uparrow$$

Back to English

A positive determinant is economically useful

$D=(1-c_1)(1-c_2)+(1-c_1)m_2+m_1(1-c_2)$ ifadesindeki her çarpan pozitiftir. Böylece $D>0$ olduğunu gördüğümüz için hem ters matris vardır hem de şok çarpanlarının işaretini güvenle okuyabiliriz. Pozitif katsayılarla pozitif A_1,A_2 verilirse gelirlerin payları da pozitiftir. Fakat "tek denge var" ile "ekonomi zamanla mutlaka o dengeye gider" farklı iddialardır.

$$D=(1-c_1)(1-c_2)+(1-c_1)m_2+m_1(1-c_2)>0$$

Back to English

Structural slope versus a policy effect

p42'de "$\partial Y_1/\partial Y_2$ teknik olarak doğru mu, içsellik sorunu var mı?" sorusu açık bırakılmıştır. İlk yapısal denklemi A_1 sabitken çözersek $Y_1=(A_1+m_2Y_2)/(1-c_1+m_1)$; bu ilişkinin eğimi $m_2/(1-c_1+m_1)$ olur. Ancak Y_2 modelin dışından serbestçe seçilen bir düğme değildir. Örneğin A_2 şokunun Y_1 üzerindeki toplam denge etkisi m_2/D'dir. Belirli bir A_2 şokunda dY_1/dY_2 oranı yapısal eğime eşit olabilir; bu, $\partial Y_1/\partial A_2$ ile aynı türev olduğu anlamına gelmez. Notlarda hata terimi veya tahmin yöntemi verilmediğinden buradan tek başına istatistiksel içsellik yanlılığı sonucu da çıkaramayız.

Structural slope: $m_2/(1-c_1+m_1)$; equilibrium response to A_2: m_2/D

Back to English

ME-07-C1 Question support

Kare bir matrisin determinantı sıfırsa hangi sonuç kesindir?

Return to foundations

ME-07-C2 Question support

Çarpımın tanımlı olması ve çarpan sırası birlikte önemlidir.

Return to foundations

ME-07-C3 Question support

A_2 artışının Y_1 üzerindeki etkisinin ekonomik zincirini seçin.

Return to foundations

Inverse properties and the solution formula - source p28

p28’deki bütün ters matris özelliklerini çarpımın tanımından kontrol ediyoruz.

Source PDF pages 28

$$Ax=d \rightarrow A^{-1}Ax=A^{-1}d \rightarrow Ix=A^{-1}d \rightarrow x=A^{-1}d$$

Her iki tarafa aynı soldan çarpma uygulanır. Birleşme özelliği $(A^{-1}A)x$ yazmaya izin verir; $A^{-1}A=I$ ve $Ix=x$ olduğundan bilinmeyen vektör yalnız kalır.

If $AB=BA=I$ and $AC=CA=I$, then $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$.

İlk eşitlikte I etkisizdir; I yerine AC koyarız. Birleşmeyle BA yan yana gelir ve I olur. Sonuç $B=C$ olduğundan ters matris tektir.

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I \rightarrow (A^{-1})^{-1}=A$$

A, A^{-1} ile her iki sırada çarpılınca I verdiğinden A^{-1}’in tersinin tanımını sağlar. Bu karşılıklı ters olma özelliğidir.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I;\ (B^{-1}A^{-1})(AB)=I$$

A ve B aynı $n \times n$ boyutta ve terslenebilir olmalıdır. Sırayı tersine çevirmezsek BB^{-1} ve AA^{-1} çiftlerini yan yana getiremeyiz; genel olarak $AB \neq BA$ olduğu için keyfi yer değiştiremeyiz.

Back to English

The complete 3×3 cofactor procedure - pp36-38

İşaret düzeni, silinen satır-sütun ve son transpoz birlikte uygulanır; yalnızca birkaç kofaktör hesaplamak yeterli değildir.

Source PDF pages 36-38

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

İndislerde ilk sayı satır, ikinci sayı sütundur. Kofaktör C_{ij} hesaplanırken a_{ij}’nin bulunduğu satır ve sütun silinir.

$C_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$; $C_{12}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$; $C_{13}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$

Örneğin C_{12} için 1. satır ve 2. sütunu silince kalan 2×2 determinant $a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}$ olur. Konum işareti negatif olduğu için parantezin tamamını eksiyle çarparız.

$C_{21}=-(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})$; $C_{22}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$; $C_{23}=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$

Minörün kendi determinant işaretiyle kofaktörün ek işareti farklı işlemlerdir. İkisini birden doğru uygulamak gerekir; negatif bir minör negatif kofaktör konumunda pozitif sonuç verebilir.

$C_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$; $C_{32}=-(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})$; $C_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Üçüncü satır silindiğinde sadece ilk iki satırın elemanları kalır. Tüm dokuz kofaktörü kendi i,j konumuna yerleştiririz.

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix};\quad \operatorname{adj}(A)=C^{T}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Transpozda satır ve sütun indisleri yer değiştirir. Bu adımı atlamak genellikle yanlış ters matris üretir; C simetrik değilse C ile C^{T} farklıdır.

$A^{-1}=C^{T}/\det(A)$; verify $AA^{-1}=I$

Determinant bir sayı, adj(A) ise matristir. Bölme her elemana uygulanır. En son çarpımı hesaplayarak I elde edildiğini görmek işaret ve transpoz hatalarını yakalar.

Back to English

Build and invert the two-country model - pp41-42

Gelirlerin her iki denklemde bulunması nedeniyle tek tek bağımsız çözüm yapamayız; ortak katsayı matrisini kurarız.

Source PDF pages 41-42

$Y_1=c_1Y_1+A_1+m_2Y_2-m_1Y_1$; $Y_2=c_2Y_2+A_2+m_1Y_1-m_2Y_2$

Y_1 denkleminde ihracat $X_1=M_2=m_2Y_2$, ithalat $M_1=m_1Y_1$'dir. Y_2 denkleminde yönler tersine döner. İthalat eksi, ihracat artı işaretlidir.

$Y_1-c_1Y_1+m_1Y_1-m_2Y_2=A_1$; $Y_2-c_2Y_2+m_2Y_2-m_1Y_1=A_2$

Sağdaki c_1Y_1 sola eksi, $-m_1Y_1$ sola artı geçer. Her denklemde A_i tek başına sağda kalır; böylece içsel ve dışsal taraf ayrılır.

$(1-c_1+m_1)Y_1-m_2Y_2=A_1;\ -m_1Y_1+(1-c_2+m_2)Y_2=A_2$

Y_1'in birinci denklemdeki katsayısı $1-c_1+m_1$, ikinci denklemdeki katsayısı $-m_1$'dir. Sütun sırasını her iki satırda Y_1, Y_2 olarak koruruz.

$$K=\begin{bmatrix} 1-c_1+m_1 & -m_2 \\ -m_1 & 1-c_2+m_2 \end{bmatrix};\quad K\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

Kaynak katsayı matrisini A diye adlandırır. Burada yalnızca karışmayı azaltmak için K diyoruz; matematik değişmez. Köşegen dışı eksi işaretler ülkeler arası olumlu talep bağını denklemin soluna taşıdığımız için oluşur.

$$D=\det(K)=(1-c_1+m_1)(1-c_2+m_2)-(-m_2)(-m_1)$$

$(-m_2)(-m_1)=m_1m_2$ olduğu için determinantta bu çarpım çıkarılır. İşaretlerin unutulması tüm çarpanları değiştirir.

$$D=(1-c_1)(1-c_2)+(1-c_1)m_2+m_1(1-c_2)+m_1m_2-m_1m_2$$

İki parantezin dört çarpımını yazdık. Son iki terim birbirini götürür; kalan üç terim eğilim varsayımları altında pozitiftir.

$$D=(1-c_1)(1-c_2)+(1-c_1)m_2+m_1(1-c_2)>0;\ \ K^{-1}=(1/D)\begin{bmatrix} 1-c_2+m_2 & m_2 \\ m_1 & 1-c_1+m_1 \end{bmatrix}$$

Pozitif determinant, tek çözümü garanti eder. Başlangıçtaki $-m_2$ ve $-m_1$ ters alma sırasında $+m_2$ ve $+m_1$ olur.

$$Y_1^*=[(1-c_2+m_2)A_1+m_2A_2]/D;\ Y_2^*=[m_1A_1+(1-c_1+m_1)A_2]/D$$

İndirgenmiş biçimde her içsel değişken yalnızca model dışından verilen büyüklükler ve parametrelerle ifade edilir. A_1, A_2 pozitifken hem pay hem payda pozitif olduğundan gelirler de pozitiftir.

Back to English

Comparative effects and the structural-slope question - p42

Diğer bütün dışsal büyüklükleri ve parametreleri sabit tutarak toplam denge etkisini buluyoruz.

Source PDF pages 42

$\partial Y_1^*/\partial A_1=(1-c_2+m_2)/D>0$; $\partial Y_2^*/\partial A_1=m_1/D>0$

Y_1'in payında A_1'in katsayısı $1-c_2+m_2$; Y_2'nin payında m_1'dir. Payda A_1'e bağlı olmadığı için bölüm kuralı burada sabit paydaya bölmeye indirgenir.

$\partial Y_1^*/\partial A_2=m_2/D>0$; $\partial Y_2^*/\partial A_2=(1-c_1+m_1)/D>0$

A_2 kendi ülkesinde doğrudan talep, ülke 1'de ihracat kanalıyla talep yaratır. $D>0$ ve $m_2>0$ işaret yorumunu destekler.

$(1-c_1+m_1)Y_1=A_1+m_2Y_2 \rightarrow Y_1=(A_1+m_2Y_2)/(1-c_1+m_1)$

m_2Y_2 sol taraftan sağa alınır; sonra pozitif $1-c_1+m_1$ katsayısına bölünür. Bu yalnızca tek denklemin eğri biçimidir, bütün modelin indirgenmiş biçimi değildir.

Holding A_1 fixed: slope $dY_1/dY_2=m_2/(1-c_1+m_1)$. Under an A_2 shock: $(dY_1^*/dA_2)/(dY_2^*/dA_2)=m_2/(1-c_1+m_1)$.

Bu eşitlik A_1 ve parametreler sabitken A_2 değiştirilen deney için geçerlidir. Farklı bir dışsal değişiklik aynı gelir-gelir oranını vermek zorunda değildir; örneğin A_1 değişimi ilk yapısal eğriyi kaydırır. İçsel değişkeni bağımsız bir politika aracıymış gibi yorumlamayın.

Back to English

A singular source matrix - p36

Determinant kontrolü boşuna işlem yapmayı önler; kaynak sayfadaki bağımlılık örneğini doğru katsayılarla yazıyoruz.

Source PDF pages 36

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

v_3'ün her elemanı v_1'in iki katıdır. Dolayısıyla üçüncü sütun bağımsız bilgi getirmez.

$v_3=2v_1 \rightarrow -2v_1+0v_2+v_3=0$

Doğrusal bağımlılık için sıfır vektörünü veren en az bir sıfır olmayan katsayı gerekir. Kaynaktaki bazı k katsayısı karalamaları sütun sırasıyla tutarlı değildir; örneğin $(-2,0,1)$ ve bunun 4 katı $(-8,0,4)$ doğru örneklerdir.

$$\det(A)=0\cdot(12-2)-(-1)\cdot(4-4)+0\cdot(1-6)=0$$

Orta terimin minörü $1\cdot4-2\cdot2=0$'dır. Diğer iki terim ilk satırdaki sıfırlar nedeniyle sıfır olur. $\det(A)=0$ olduğundan bu A'nın tersi yoktur; sıfıra bölme yapılamaz.

Kaynak okuma notu - PDF 36

Kaynak sütunları için doğru sıfır olmayan katsayılar $(-2,0,1)$ ve bunun sıfır olmayan katlarıdır. El yazısındaki tutarsız örnek katsayıları doğru sonuç olarak kopyalamıyoruz.

Back to English

Two source inverses - pp38-39

Ana köşegendeki iki elemanı değiştir, diğer iki elemanın işaretini değiştir ve determinantın tamamına böl; nedenini aşağıdaki kofaktörler gösteriyor.

Source PDF pages 38-39

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix};\quad \det(A)=4\cdot5-3\cdot2=20-6=14$$

Çapraz çarpımları sırayla çıkarırız. 14, bütün ters matris elemanlarının ortak paydasıdır.

$$C=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix};\quad C^{T}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$C_{12}=-2$ ve $C_{21}=-3$'tür. Transpozda bunlar yer değiştirir; doğrudan C/14 yazmak yanlış olur.

$$A^{-1}=(1/14)\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix};\quad AA^{-1}=(1/14)\begin{bmatrix}14 & 0\\ 0 & 14\end{bmatrix}=I$$

Sol üst $4\cdot5+3\cdot(-2)=14$; sağ üst $4\cdot(-3)+3\cdot4=0$; sol alt $2\cdot5+5\cdot(-2)=0$; sağ alt $2\cdot(-3)+5\cdot4=14$. Sonra 14'e bölünce I olur.

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix};\quad \det(B)=(-1)\cdot2-3\cdot2=-8$$

Negatif determinant tersin olmadığı anlamına gelmez. Her elemana negatif paydanın işareti de uygulanır.

$$\operatorname{adj}(B)=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix};\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}-1/4 & 3/8\\ 1/4 & 1/8\end{bmatrix}$$

2/(−8)=−1/4; (−3)/(−8)=3/8; (−2)/(−8)=1/4; (−1)/(−8)=1/8. Kaynaktaki A^{-1} etiketi harf sürçmesidir; hesaplanan matris B^{-1}'dir.

Kaynak okuma notu - PDF 39

Hesaplanan ters B'ye aittir. Matris elemanları doğrudur; A^{-1} harfi B^{-1} olarak düzeltilmiştir.

Back to English

Solve the exact source system - pp40-41

Bir önceki ters matrisi gerçek bir denklem sisteminde kullanıyoruz; bu kaynak örneği, aşağıdaki yeni sayılı alıştırmadan ayrıdır.

Source PDF pages 40-41

$$4x+3y=28;\ 2x+5y=42 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Birinci sütun x katsayıları 4 ve 2; ikinci sütun y katsayıları 3 ve 5; sağ taraf 28 ve 42 olur.

$$\det(A)=14\neq 0;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1/14)\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Ters matris sağ taraftaki vektörün solundadır. p41'deki bir ara satırda −3 yerine +3 görünür; doğru kofaktör ve doğru sonuç için işaret −3 olmalıdır.

$$x=(5\cdot 28-3\cdot 42)/14=(140-126)/14=1;\ y=(-2\cdot 28+4\cdot 42)/14=(-56+168)/14=8$$

İki bileşen aynı anda aynı paydaya bölünür. Alternatif olarak $[28,42]^T/14=[2,3]^T$ yapıp adj(A) ile çarpabiliriz; sonuç yine $[1,8]^T$ olur.

$$4\cdot 1+3\cdot 8=28;\ 2\cdot 1+5\cdot 8=42$$

Yalnızca dönüştürülmüş sistem değil, başlangıçtaki iki denklem de sağlandığı için çözümü doğruladık. det(A)≠0 olduğundan başka çözüm yoktur.

Kaynak okuma notu - PDF 41

Kofaktörden gelen −3 işareti korunur. İki başlangıç denklemiyle kontrol edildiğinde x=1,y=8 doğrudur.

Back to English

ME-07-W1 Worked example support

Kaynakta kurulan modeli yeni sayılarla uygula. Önce gelirleri birlikte çöz; sonra C_i ve M_i ilişkilerine geri dön. İhracatı ayrı bir bağımsız sayı gibi seçme: $X_1=M_2$ ve $X_2=M_1$.

$0.6Y_1-0.1Y_2=80;\ -0.2Y_1+0.6Y_2=40$

Birinci katsayı $1-0.6+0.2=0.6$; ikinci katsayı $1-0.5+0.1=0.6$. Çapraz katsayılar $-m_2=-0.1$ ve $-m_1=-0.2$ olur.

$D=0.6\cdot0.6-(-0.1)(-0.2)=0.36-0.02=0.34$

0.34 sıfır olmadığı için hem ters yöntemi hem Cramer yöntemi kullanılabilir.

$Y_1^*=(0.6\cdot80+0.1\cdot40)/0.34=52/0.34=2600/17;$
$Y_2^*=(0.2\cdot80+0.6\cdot40)/0.34=40/0.34=2000/17$

Gelirler yaklaşık 152.9412 ve 117.6471’dir. Kesirleri korumak daha sonraki harcama ve ticaret kontrollerinde yuvarlama hatasını önler.

$C_1=1560/17;\ C_2=1000/17;\ M_1=X_2=520/17;\ M_2=X_1=200/17$

$C_1=0.6\cdot2600/17$; $C_2=0.5\cdot2000/17$. İthalatlarda ülkenin kendi geliri kullanılır; ihracat karşı ülkenin ithalatıdır.

$Y_1=(1560+1360+200-520)/17=2600/17;\ Y_2=(1000+680+520-200)/17=2000/17$

$80=1360/17$ ve $40=680/17$ yazdık. Böylece $C+A+X-M$ toplamlarının tam olarak hesaplanan gelirleri verdiğini görüyoruz.

$\Delta Y_1=(0.1/0.34)\cdot10=50/17;\ \Delta Y_2=(0.6/0.34)\cdot10=300/17$

Model A_1,A_2 açısından doğrusal olduğu için bu sonlu 10 birimlik değişim yaklaşık değil tamdır. Yeni gelirler $Y_1=2650/17$ ve $Y_2=2300/17$ olur; parametreler değişmediği için D sabit kalır.

Ülke 2 harcama artışının ülke 1’e nasıl taşındığını ve statik modelin neyi söylemediğini açıkla.

Return to the worked example

ME-07-S1 Question support

Önce katsayı matrisini x,y sırasıyla kur. Sonuçları iki başlangıç denkleminde de sınamadan bitirme.

Sıfır olmayan determinant neden tek çözüm sağlar? Ekonomik yorum için ayrıca neleri kontrol etmeliyiz?

Return to the problem

ME-07-S2 Question support

Tekil matris ile çözümsüz sistem aynı kavram değildir. İki farklı sağ tarafı ayrı ayrı incele.

Tekillik neden her sağ taraf için çözümsüzlük demek değildir?

Return to the problem

ME-07-S3 Question support

Aynı hesapta bir dışsal şok çarpanı ile tek denklemin gelir-gelir eğimini ayır.

A_1 artışının ülke 2’ye olumlu etkisini ve dışsal şok çarpanıyla yapısal eğim farkını açıkla.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-07-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-07-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-07-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-07-S1

The determinant is $3\cdot4-1\cdot2$.

2×2 ters için köşegen elemanları değiştir; diğerlerinin işaretini değiştir; hepsini determinanta böl.

Return and complete your attempt

ME-07-S2

The first row is twice the second row. The constants must obey the same relation.

İlk sistemde $6=2\cdot3$ doğru; ikinci sistemde $6=2\cdot4$ yanlış.

Return and complete your attempt

ME-07-S3

Both diagonal coefficients are 0.75, and D=0.5.

İlk şok A_1 olduğundan ters matrisin birinci sütununu kullan. Koşullu eğim için ikinci yapısal denklemi Y_2 açısından düzenle.

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-07-W1 Model interpretation

The foreign-spending shock raises both incomes. Bilateral exports and imports match exactly. The calculation compares two equilibria; it does not establish a time path.

Ülke 2’nin ek harcaması ülke 1’e de talep taşır. Her ihracatın karşı ülkede eşit ithalatı bulunduğu için dış ticaret muhasebesi tutarlıdır. Çarpanlar iki dengeyi karşılaştırır; dengenin kaç dönemde veya hangi yoldan oluşacağını söylemez.

Check the explanation

☐ Names the bilateral identity $M_2=X_1$.

☐ Links the foreign spending shock to foreign income, imports and domestic exports.

☐ States that the result compares equilibria rather than adjustment times.

ME-07-S1 Solution

$$\det(A)=12-2=10;\ A^{-1}=(1/10)\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

The matrix is nonsingular.

10 sıfır değildir. Ters matrisin satırlarını sağ tarafla çarpacağız.

$$x=(4\cdot 11-14)/10=30/10=3;\ y=(-2\cdot 11+3\cdot 14)/10=20/10=2$$

Take the two dot products.

İkinci pay $-22+42=20$’dir; ilk pay $44-14=30$’dur.

$$3\cdot 3+2=11;\ 2\cdot 3+4\cdot 2=14$$

Verify both equations.

Her iki eşitlik de sağlanır; determinant sıfır olmadığı için çözüm tektir.

Model English interpretation

Since $\det(A)=10\neq 0$, the coefficient matrix is invertible, so the system has the unique solution $x=3, y=2$. Both original equations are satisfied. The question supplies no economic labels or units for x and y, so no economic quantity or policy meaning should be invented.

Türkçe reasoning

Terslenebilirlik her sabit vektörü için tek bir çözüm verir. Ancak x ve y'ye fiyat, miktar veya gelir adı verilmediği için bu örnekten kendiliğinden ekonomik yorum çıkarılamaz. Ekonomik modelde ayrıca değişken tanımları, birimler ve kabul edilebilirlik koşulları gerekir.

Check your explanation

☐ States that A is invertible and hence maps each d to one x.

☐ Checks the original equations.

☐ Does not invent an economic meaning or unit not supplied by the problem.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-07-S2 Solution

$\det(H)=2\cdot2-4\cdot1=0$

Being square is not sufficient for invertibility.

Satırlar bağımlıdır; ters matrisi tanımlayan tekil olmayan koşulu sağlanmaz.

$Hx=[6,3]^T \rightarrow x_1+2x_2=3 \rightarrow (x_1,x_2)=(3-2t,t),\ t\in\mathbb{R}$

The equations coincide and leave one free variable.

İlk denklem ikinci denklemin iki katıdır. $x_2=t$ seçilince $x_1=3-2t$ olur; sonsuz çözüm vardır.

$Hx=[6,4]^T$ would require $x_1+2x_2=3$ and $x_1+2x_2=4$

The second system is inconsistent.

Aynı ifade aynı anda 3 ve 4 olamaz; bu kez hiç çözüm yoktur. Katsayı matrisi iki sistemde aynı kalmıştır.

Model English interpretation

Singularity rules out a unique inverse solution; the right-hand side decides consistency.

Türkçe reasoning

"det=0 ise çözüm yok" ezberi yerine sağ tarafın bağımlılık ilişkisine uyup uymadığını kontrol et.

Check your explanation

☐ Links row dependence to the required relation among constants.

☐ Distinguishes infinite solutions from inconsistency.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-07-S3 Solution

$D=0.75^2-0.25^2=0.5$; $Y_1=(0.75\cdot60+0.25\cdot40)/0.5=110$; $Y_2=(0.25\cdot60+0.75\cdot40)/0.5=90$

Use the reduced forms.

Paylar 55 ve 45'tir; 0.5'e bölünce 110 ve 90 olur. $0.75\cdot110-0.25\cdot90=60$ ve $-0.25\cdot110+0.75\cdot90=40$ kontrolü yapılabilir.

$\Delta Y_1=(0.75/0.5)\cdot10=15$; $\Delta Y_2=(0.25/0.5)\cdot10=5$

The response to A_1 is given by the first inverse column.

A_1 10 artınca yeni gelirler 125 ve 95 olur. Ülke 2 üzerindeki şok çarpanı 0.5'tir.

$Y_2=(A_2+0.25Y_1)/0.75$ → conditional slope=1/3; $\partial Y_2^*/\partial A_1=1/2$

Different denominators answer different questions.

1/3, A_2 sabitken Y_1'e göre yapısal eğimdir. 1/2 ise A_1'deki bir birimlik dışsal değişimin Y_2'deki toplam denge etkisidir. Bu şokta $\Delta Y_2/\Delta Y_1=5/15=1/3$ olması iki farklı türevin aynı olduğu anlamına gelmez.

Model English interpretation

The structural slope links the two endogenous movements; the multiplier links an exogenous cause to an equilibrium response.

Türkçe reasoning

Paydadaki değişkeni okuyarak soruyu tanı: Y_1 değişimi mi, A_1 şoku mu? Bu ayrım ekonomik yorumun temelidir.

Check your explanation

☐ Traces $A_1\rightarrow Y_1\rightarrow$imports of country 1/exports of country $2\rightarrow Y_2$.

☐ States that the multiplier is per unit of A_1, the structural slope per unit of Y_1.

☐ Does not claim a dynamic adjustment speed.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-07-C1 Answer B

Zero determinant prevents inversion, not necessarily consistency.

Tekillik, katsayıların bir kısmının bağımsız bilgi taşımadığını söyler. Sağ taraf bu ilişkiye uygunsa çok çözüm, aykırıysa çözümsüzlük ortaya çıkar.

If you chose differently: Separate invertibility from whether a particular right-hand side is consistent. Örneğin x+y=1 ve 2x+2y=2 ile ikinci sağ tarafı 3 olan sistemi karşılaştırın.

ME-07-C2 Answer B

$A^{-1}A=I$, and (3×3)(3×1) produces a 3×1 vector.

Soldan çarpınca A^{-1} ile A yan yana gelir. Sağdan dA^{-1} çarpımı (3×1)(3×3) olduğu için iç boyut uyuşmaz.

If you chose differently: Write dimensions before multiplying.

Matris çarpımında soldaki sütun sayısı sağdaki satır sayısına eşit olmalıdır.

ME-07-C3 Answer A

A_2 raises Y_2 and imports $M_2=m_2Y_2=X_1$, so $\partial Y_1^*/\partial A_2=m_2/D>0$.

İthalat ülke 2’nin satın almasıdır; iki ülke varsayımı nedeniyle aynı işlem ülke 1’in ihracat geliridir. Pozitif m_2 ve D bu etkiyi pozitif yapar.

If you chose differently: Use the identity $M_2=X_1$.

Hangi ülkenin ithalatının diğerinin ihracatı olduğunu tek tek yazın.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can explain why a square matrix may be singular.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can build all cofactors, transpose and verify an inverse.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can solve Ax=d by premultiplication.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can derive the two-country reduced form and prove D>0.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can distinguish an exogenous-shock multiplier from a structural slope.

Her formülden önce boyutu ve determinant koşulunu kontrol edebiliyorum. İki ülke modelinde ihracat-ithalat eşleşmesini, yapısal ve indirgenmiş biçimi ve hangi değişkenin dışsal şok olduğunu açıklayabiliyorum.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Visually verified p28 inverse collage and pp36-42 at high resolution. All displayed source matrices, numeric inverse examples, 4x+3y=28 / 2x+5y=42 system, two-country assumptions, structural/reduced forms, positivity expansion, spillovers and the endogenous-slope question are covered. Explicit corrections: p36 dependence coefficients, p39 B^{-1} label, p41 dropped minus sign. Original W1/S1-S3 numbers are not attributed to the source. No dynamic stability or econometric bias is inferred from the static deterministic equations.

ME-08 Cramer’s Rule, Taxed Income & Comparative Statics

Source PDF pages 43-46

Use Cramer’s rule correctly, derive Y*, C* and T*, and write precise economic interpretations of spending, tax and parameter changes.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

One unknown, one replaced column

For a square system Ax=d with det(A)≠0, Cramer’s rule gives $x_j=\det(A_j)/\det(A)$. A_j is obtained by replacing only column j of A by d.

$$x_j=\det(A_j)/\det(A),\ \det(A)\neq 0$$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
A_j	A with column j replaced by d	j. sütunu d ile değiştirilmiş A
det(A)	Common nonzero denominator	Ortak, sıfır olmayan payda

Türkçe explanation

Three simultaneous economic equations

Income equals consumption plus autonomous investment and government spending. Consumption depends on disposable income, not gross income. Taxes contain a lump-sum part and an income-proportional part.

$Y=C+I_0+G_0$; $C=\alpha+\beta(Y-T)$; $T=\gamma+\delta Y$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
Y	National income	Milli gelir
C	Consumption expenditure	Tüketim harcaması
T	Tax revenue/total taxes	Toplam vergi geliri
I_0	Autonomous investment	Otonom yatırım
G_0	Autonomous government expenditure	Otonom kamu harcaması
α	Autonomous consumption	Otonom tüketim
β	Marginal propensity to consume disposable income	Harcanabilir gelire göre marjinal tüketim eğilimi
γ	Lump-sum tax	Gelirden bağımsız götürü vergi
δ	Proportional income-tax rate	Oransal gelir vergisi oranı
$Y-T$	Disposable income	Harcanabilir gelir

Türkçe explanation

Which objects are given?

The endogenous variables are Y,C,T. Treat α,I_0,G_0,γ as given exogenous magnitudes and β,δ as given parameters. They can be varied one at a time in comparative statics.

Endogenous: Y,C,T. Given: $\alpha,I_0,G_0,\gamma,\beta,\delta$.

Türkçe explanation

Assumptions and economic admissibility

The notes assume $\alpha>0$, $\gamma>0$, $0<\beta<1$ and $0<\delta<1$. These imply $D=1-\beta(1-\delta)>0$. Positive equilibrium income additionally requires $\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma>0$.

$D=1-\beta(1-\delta)>0$; $N=\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma$; $Y^*=N/D$

Türkçe explanation

What comparative statics actually asks

A comparative-static derivative asks how an equilibrium changes when one specified exogenous magnitude or parameter changes, holding the rest fixed. It is not a statement about the speed of adjustment over time.

Change the cause → recompute equilibrium → interpret the sign and units

Türkçe explanation

Why does taxation reduce the spending multiplier?

An extra unit of income produces δ units of additional tax and $1-\delta$ units of additional disposable income. Consumption therefore rises by $\beta(1-\delta)$, not β.

Effective induced-consumption slope$=\beta(1-\delta)$; spending multiplier$=1/[1-\beta(1-\delta)]$

Türkçe explanation

Government spending is not a lump-sum tax

A one-unit G_0 increase enters demand directly. A one-unit γ increase first lowers disposable income, so its initial consumption effect is $-\beta$. Their multipliers differ in sign and magnitude.

$\partial Y^*/\partial G_0=1/D$; $\partial Y^*/\partial\gamma=-\beta/D$

Türkçe explanation

Tax revenue can rise while income falls

Raising γ lowers Y, but tax revenue still rises by $(1-\beta)/D$ per unit under the stated assumptions. The direct tax increase dominates the induced loss of proportional tax revenue.

$\partial T^*/\partial\gamma=1-\delta\beta/D=(1-\beta)/D>0$

Türkçe explanation

Finite changes versus local derivatives

With β and δ fixed, equilibrium is linear in α, I_0, G_0, γ, so constant multipliers give exact finite changes. Changes in β or δ alter D, so a derivative is generally a local approximation for a finite parameter change.

Exact when D fixed: $\Delta Y = \Delta G_0 / D$. Local when δ varies: $\Delta Y \approx (\partial Y^* / \partial \delta)\Delta\delta$

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-08-C1

To find consumption C by Cramer's rule when the unknown vector is $(Y, C, T)^T$, what is replaced?

A. The first row

B. The second column

C. The third column

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-08-C2

Which is the government-expenditure multiplier in this model?

A. $-\beta/D$

B. $1/D$

C. δ

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-08-C3

Assume $Y^*>0$. What is the sign of $\partial Y^*/\partial \delta$ when $0<\beta<1$ and $D>0$?

A. Positive, because tax revenue rises

B. Negative, because $\partial Y^*/\partial \delta=-\beta Y^*/D$

C. Zero, because δ is a parameter

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-08-C4

A reported multiplier is 2.04 and G_0 increases by one monetary unit. Which interpretation is correct?

A. Income is 2.04% higher, regardless of the starting income.

B. Equilibrium income increases by about 2.04 monetary units, ceteris paribus.

C. Income reaches the new equilibrium in 2.04 periods.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

Put the taxed-income model into matrix form - pp43-44

Separate endogenous quantities from given magnitudes.

Source PDF pages 43-44

$$Y=C+I_0+G_0 \rightarrow Y-C=I_0+G_0$$

Move consumption to the endogenous side.

$$C=\alpha+\beta(Y-T)=\alpha+\beta Y-\beta T \rightarrow -\beta Y+C+\beta T=\alpha$$

Expand consumption, then move the two income-dependent terms left.

$$T=\gamma+\delta Y \rightarrow -\delta Y+0C+T=\gamma$$

Move proportional tax income left.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix};\ A\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_0+G_0 \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Use the same order Y,C,T in every equation.

$$D=1\cdot(1\cdot 1-\beta\cdot 0)-(-1)\cdot[(-\beta)\cdot 1-\beta(-\delta)]+0$$

Expand the determinant through the first row.

$$D=1+(-\beta+\beta\delta)=1-\beta+\beta\delta=1-\beta(1-\delta)>0$$

Factor β and use the parameter restrictions.

Source reading note - PDF 45

In the notes: One handwritten tax line shows a minus and one vector entry is labelled G.

Checked form: The consistent model is $T=\gamma+\delta Y$, with unknown vector $(Y,C,T)^T$.

The matrix, numerical example and subsequent derivatives all confirm the plus tax rule and T as the third unknown.

Detailed Turkish reasoning

Find Y*, C* and T* by Cramer’s rule - p44

All three outcomes need their own replacement determinant.

Source PDF pages 44

$$E=I_0+G_0;\ A_\gamma=\begin{bmatrix} E & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Replace only the first column for income.

$$\det(A_\gamma)=E(1-0)-(-1)(\alpha-\beta\gamma)=E+\alpha-\beta\gamma=N$$

Expand along the first row.

$$Y^*=(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)/D$$

Divide the income determinant by D.

$$Ac=\begin{bmatrix} 1 & E & 0 \\ -\beta & \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma & 1 \end{bmatrix};\ \det(Ac)=(\alpha-\beta\gamma)-E(-\beta+\beta\delta)$$

Replace the second column, then expand through the first row.

$$C^*=[\alpha-\beta\gamma+\beta(1-\delta)(I_0+G_0)]/D = Y^*-I_0-G_0$$

Factor $-E(-\beta+\beta\delta)$ into $\beta(1-\delta)E$.

$$A_t=\begin{bmatrix} 1 & -1 & E \\ -\beta & 1 & \alpha \\ -\delta & 0 & \gamma \end{bmatrix};\ \det(A_t)=\gamma-(-1)(-\beta\gamma+\alpha\delta)+E\delta$$

Replace the third column and keep all three first-row terms.

$$T^*=[(1-\beta)\gamma+\delta(\alpha+I_0+G_0)]/D = \gamma+\delta Y^*$$

Collect the γ terms and compare with the tax rule.

$$Y^*-T^*=(1-\delta)Y^*-\gamma;\ C^*=\alpha+\beta(Y^*-T^*)$$

Verify the disposable-income and consumption equations.

Detailed Turkish reasoning

Government spending and lump-sum-tax effects - pp44,46

The notes ask for the effects on all three equilibrium variables.

Source PDF pages 44,46

$$Y^*=N/D;\ \partial N/\partial G_0=1;\ \partial D/\partial G_0=0$$

Recognize that G_0 changes the numerator only.

$$\partial Y^*/\partial G_0=[1\cdot D-N\cdot 0]/D^2=D/D^2=1/D>0$$

Apply the quotient rule and simplify.

$$C^*=Y^*-I_0-G_0 \rightarrow \partial C^*/\partial G_0=1/D-1=(1-D)/D=\beta(1-\delta)/D>0$$

Subtract the direct expenditure unit from the total income response.

$T^*=\gamma+\delta Y^* \rightarrow \partial T^*/\partial G_0=\delta/D>0$

Tax revenue responds through the higher income.

At D=0.49: $\partial Y^*/\partial G_0=100/49\approx2.0408$; $\partial C^*/\partial G_0=51/49\approx1.0408$; $\partial T^*/\partial G_0=15/49\approx0.3061$

Evaluate the source example multipliers without premature rounding.

$\partial Y^*/\partial\gamma=-\beta/D$; $\partial C^*/\partial\gamma=-\beta/D$; $\partial T^*/\partial\gamma=1-\delta\beta/D=(1-\beta)/D$

Differentiate the lump-sum-tax experiment separately.

With fixed β,δ: $\Delta Y^*=\Delta G_0/D$ and $\Delta Y^*=-\beta\Delta\gamma/D$

These finite changes are exact for isolated shocks to G_0 or γ.

Source reading note - PDF 46

In the notes: $1/[1-\beta(1-\delta)]$ beside $\partial Y^*/\partial G_0$ is labelled “tax multiplier”.

Checked form: It is the government-expenditure multiplier; the lump-sum-tax multiplier is $-\beta/D$.

The denominator includes tax leakage, but the variable being changed is G_0.

Detailed Turkish reasoning

The income-tax-rate derivative - p46

Explain the negative effect on income and complete the consumption and tax-revenue responses.

Source PDF pages 46

$N=\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma$; $\partial N/\partial\delta=0$; $D=1-\beta+\beta\delta$; $\partial D/\partial\delta=\beta$

The numerator is fixed in an isolated δ change.

$\partial Y^*/\partial\delta=(0\cdot D-N\beta)/D^2=-\beta N/D^2$

Use the quotient rule with a changing denominator.

$\partial Y^*/\partial\delta=-(\beta/D)(N/D)=-\beta Y^*/D<0$ when $Y^*>0$

Recognize N/D as equilibrium income.

$\partial C^*/\partial\delta=\partial Y^*/\partial\delta=-\beta Y^*/D$

Autonomous investment and government spending are unchanged.

$\partial T^*/\partial\delta = Y^* + \delta(\partial Y^*/\partial\delta) = Y^*(1-\delta\beta/D) = (1-\beta)Y^*/D > 0$

Use the product rule for δY^*.

Detailed Turkish reasoning

All 18 comparative-static derivatives - the p46 exercise completed

Three endogenous outcomes times six given magnitudes/parameters gives 18 derivatives. Let $Z = Y^* - T^* = (1-\delta)Y^* - \gamma$.

Source PDF pages 46

α: $\partial Y^*/\partial\alpha = 1/D$; $\partial C^*/\partial\alpha = 1/D$; $\partial T^*/\partial\alpha = \delta/D$

An autonomous-consumption increase raises income, consumption and taxes.

I_0: $\partial Y^*/\partial I_0 = 1/D$; $\partial C^*/\partial I_0 = \beta(1-\delta)/D$; $\partial T^*/\partial I_0 = \delta/D$

Investment has the same induced-consumption mechanism as government spending.

G_0: $\partial Y^*/\partial G_0 = 1/D$; $\partial C^*/\partial G_0 = \beta(1-\delta)/D$; $\partial T^*/\partial G_0 = \delta/D$

Government spending raises all three outcomes under the parameter restrictions.

γ: $\partial Y^*/\partial\gamma = -\beta/D$; $\partial C^*/\partial\gamma = -\beta/D$; $\partial T^*/\partial\gamma = (1-\beta)/D$

Lump-sum taxes reduce income and consumption but increase revenue in this model.

$\partial Y^*/\partial\beta = [(-\gamma)D - N(-1+\delta)]/D^2 = [(1-\delta)N - \gamma D]/D^2 = Z/D$

Differentiate both N and D with respect to β.

β: $\partial Y^*/\partial\beta = Z/D$; $\partial C^*/\partial\beta = Z/D$; $\partial T^*/\partial\beta = \delta Z/D$

These three derivatives are positive if disposable income Z is positive.

δ: $\partial Y^*/\partial\delta = -\beta Y^*/D$; $\partial C^*/\partial\delta = -\beta Y^*/D$; $\partial T^*/\partial\delta = (1-\beta)Y^*/D$

For $Y^* > 0$, the signs are negative, negative and positive.

Detailed Turkish reasoning

Bridge to the market-model review - bottom of p46

The notes move from income comparative statics to market comparative statics.

Source PDF pages 46 (bottom)

$Q^D=a-bP$; $Q^s=-c+dP$; $Q^D=Q^s$

Equilibrium joins the demand and supply relations.

$a-bP=-c+dP \rightarrow a+c=(b+d)P \rightarrow P^*=(a+c)/(b+d)$

Collect price terms and divide by the positive slope sum.

$Q^*=a-b(a+c)/(b+d)=[a(b+d)-b(a+c)]/(b+d)=(ad-bc)/(b+d)$

Substitute the equilibrium price and simplify.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Cramer’s rule for the two-country model - p43

Reproduce the preceding inverse solution by replacing one column at a time.

Source PDF pages 43

$$K=\begin{bmatrix} a & -m_2 \\ -m_1 & b \end{bmatrix};\ a=1-c_1+m_1;\ b=1-c_2+m_2;\ D=ab-m_1m_2>0$$

Use temporary symbols a,b to keep the determinant readable.

$$K_1=\begin{bmatrix} A_1 & -m_2 \\ A_2 & b \end{bmatrix};\ \det(K_1)=A_1b-(-m_2)A_2=bA_1+m_2A_2$$

Replace the first column to solve for Y_1.

$Y_1^*=[(1-c_2+m_2)A_1+m_2A_2]/D$

Divide by the determinant of the original coefficient matrix.

$$K_2=\begin{bmatrix} a & A_1 \\ -m_1 & A_2 \end{bmatrix};\ \det(K_2)=aA_2-A_1(-m_1)=aA_2+m_1A_1$$

Replace the second column for Y_2.

$Y_2^*=[(1-c_1+m_1)A_2+m_1A_1]/D$

The result agrees with the matrix inverse method.

Source reading note - PDF 43

In the notes: A simplified Y_1 numerator shows $1-c_1+m_2$.

Checked form: The unchanged lower-right coefficient is $1-c_2+m_2$.

$Y_1^*=[(1-c_2+m_2)A_1+m_2A_2]/D$.

Türkçe source-example reasoning

The exact numerical source example - p45

Source inputs: $I_0=500$, $G_0=250$, $\alpha=200$, $\beta=0.6$, $\gamma=50$, $\delta=0.15$. Find equilibrium Y,C,T.

Source PDF pages 45

$E=500+250=750$; $D=1-0.6(1-0.15)=1-0.51=0.49$

Compute autonomous spending and the common determinant.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.6 \\ -0.15 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad d=\begin{bmatrix} 750 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Write the numerical coefficient matrix and constant vector.

$\det(A_Y)=750+200-0.6\cdot50=950-30=920$; $Y^*=920/0.49=92000/49\approx1877.5510$

Expand the income replacement determinant.

$\det(Ac)=(200-30)-750(-0.6+0.09)=170+382.5=552.5$

Use the first-row expansion shown in the notes.

$C^*=552.5/0.49=55250/49\approx1127.5510$

Divide by the same D, not by a new determinant.

$\det(A_t)=-30+30+50+112.5=162.5$; $T^*=162.5/0.49=16250/49\approx331.6327$

Complete the tax calculation left as a quotient in the source.

$Y^*-T^*=75750/49\approx1545.9184$; $200+0.6(75750/49)=55250/49$

Check the original consumption equation using disposable income.

$Y^*=C^*+500+250$; $T^*=50+0.15Y^*$

All three original equations hold exactly with the fractions.

Source reading note - PDF 45

In the notes: Source rounds $Y^*=1877.5$ and $C^*=1127.5$ before completing checks.

Checked form: $Y^*=92000/49$, $C^*=55250/49$, $T^*=16250/49$.

Keep exact fractions until the final display to avoid propagated rounding error.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-08-W1 Two policies, different channels

Let $Y=C+I_0+G_0$, $C=\alpha+\beta(Y-T)$, and $T=\gamma+\delta Y$, with $\alpha=80$, $\beta=0.75$, $\gamma=20$, $\delta=0.20$, $I_0=60$ and $G_0=40$. Find Y^*, C^* and T^*. Compare two separate policies: (A) G_0 rises by 20; (B) γ rises by 8. For each policy, report exact changes in Y,C,T and explain the economic mechanism in English.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$D=1-0.75\cdot0.8=0.4$; $N=80+60+40-0.75\cdot20=165$

Compute the common denominator and income numerator.

$Y^*=165/0.4=412.5$; $C^*=412.5-100=312.5$; $T^*=20+0.2\cdot412.5=102.5$

Find all three equilibrium levels.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

Policy A: $\Delta Y=20/0.4=50$; $\Delta C=[0.75\cdot0.8/0.4]\cdot20=30$; $\Delta T=(0.2/0.4)\cdot20=10$

An extra 20 units of government spending creates 50 units of equilibrium income.

Policy B: $\Delta Y=(-0.75/0.4)\cdot8=-15$; $\Delta C=-15$; $\Delta T=[(1-0.75)/0.4]\cdot8=5$

Higher lump-sum taxes contract income and consumption but increase tax revenue.

Interpret before reading the model answer

Write a short exam answer comparing the channels, signs and units of the two policies. Explain why the tax-revenue change in policy B differs from the direct lump-sum-tax increase.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-08-S1 Rebuild and interpret a taxed equilibrium

Use $\alpha=60$, $\beta=0.5$, $\gamma=20$, $\delta=0.2$, $I_0=50$ and $G_0=20$ in the taxed-income model. Find Y^*, C^*, T^* and disposable income. Then increase G_0 by 12, holding every other primitive fixed, and calculate the exact changes in Y,C,T.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-08-S1 Interpretation and verification

Why is ΔY greater than the initial ΔG_0, and why does tax revenue change even though the tax policy is unchanged?

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-08-S2 Diagnose the multiplier label

A student uses $\beta=0.8$ and $\delta=0.25$, computes $D=0.4$, and calls $1/D=2.5$ the lump-sum-tax multiplier. Correct the label. Find the change in income if G_0 increases by 4, and separately if γ increases by 4. Assume an economically admissible starting equilibrium.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-08-S2 Interpretation and verification

Explain in English why equal-sized spending and lump-sum-tax increases do not have equal-sized opposite income effects.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-08-S3 A tax-rate change is not a fixed multiplier shock

Return to $\alpha=60$, $\beta=0.5$, $\gamma=20$, $I_0=50$ and $G_0=20$. Raise δ from 0.20 to 0.30. Compute the exact new equilibrium Y*, C*, T* and the exact change in Y. Compare it with the derivative approximation evaluated at $\delta=0.20$. Explain the difference.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-08-S3 Interpretation and verification

Write an exam answer that states the direction of the tax-rate effect, distinguishes a percentage point from a percent change, and explains why the derivative does not give the exact finite change.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

One unknown, one replaced column

Cramer kuralı yeni bir ekonomik varsayım değildir; ters matrisle aynı tek çözümü farklı bir hesapla verir. Hangi bilinmeyeni arıyorsanız onun katsayı sütununu sabitler vektörüyle değiştirirsiniz. Satır değil sütun değiştirilir; diğer sütunların sırası ve değerleri korunur. Paydada her bilinmeyen için aynı asıl katsayı determinantı bulunur. det(A)=0 ise bu bölme kuralı uygulanamaz.

$x_j=\det(A_j)/\det(A)$, $\det(A)\neq 0$

Back to English

Three simultaneous economic equations

Milli gelirin tamamı hanenin harcanabilir geliri değildir; vergi T çıkarıldıktan sonra Y−T kalır. T=γ+δY iki parçalı vergi kuralıdır: γ gelirden bağımsız sabit vergi, δY ise gelire bağlı vergidir. Vergi tüketimi etkiler, tüketim geliri etkiler, gelir de vergiyi etkiler; dolayısıyla Y,C,T birlikte belirlenir.

$Y=C+I_0+G_0$; $C=\alpha+\beta(Y-T)$; $T=\gamma+\delta Y$

Back to English

Which objects are given?

“Verilmiş” olmak sonsuza kadar değişmeyecek demek değildir. Tek bir dengeyi çözerken $\alpha, I_0, G_0, \gamma, \beta, \delta$ sayıları sabittir; karşılaştırmalı statikte bunlardan birini değiştirip yeni dengeyi karşılaştırırız. İçsel Y,C,T ise her deneyde yeniden çözülür. Kaynakta α bazen dışsal değişken, bazen otonom tüketim parametresi olarak adlandırılır; önemli olan çözülen bilinmeyenlerden biri olmamasıdır.

Endogenous: Y,C,T. Given: $\alpha, I_0, G_0, \gamma, \beta, \delta$.

Back to English

Assumptions and economic admissibility

β ve δ oranları boyutsuzdur; diğer büyüklükler ortak parasal birim ve dönemdedir. D>0 tek çözüm koşulunu sağlar ama tek başına Y>0 demek değildir: payın da pozitif olması gerekir. Pozitif harcanabilir gelir yorumu için Y−T=(1−δ)Y−γ>0 kontrol edilir. Notlardaki ekonomik yorumları bu alan koşullarıyla okuruz; matematiksel olarak bulunan her sayı otomatik olarak ekonomik açıdan uygun değildir.

$D=1-\beta(1-\delta)>0$; $N=\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma$; $Y^*=N/D$

Back to English

What comparative statics actually asks

$\partial Y^*/\partial G_0$, G_0 bir birim değişirken diğer verilenlerin sabit tutulduğu denge etkisidir. $\partial Y^*/\partial \delta$ ise gelir vergisi oranına duyarlılıktır. Yıldız denge değerini gösterir; türevde hangi değişkene göre işlem yapıldığı mutlaka yazılmalıdır. Ceteris paribus ifadesi “diğer her şey aynıyken” anlamına gelir; aksi halde birden fazla değişimin etkisi karışır.

Change the cause → recompute equilibrium → interpret the sign and units

Back to English

Why does taxation reduce the spending multiplier?

Bir birimlik gelir artışının δ kadarı vergiye gider. Kalan $1-\delta$ harcanabilir gelirin β kadarı tüketime dönüşür. Böylece gelirin tekrar harcamaya dönen kısmı $\beta(1-\delta)$ olur. Vergi oranı yükseldikçe bu geri dönüş küçülür ve kamu harcaması çarpanı düşer. Bu bir statik geri besleme açıklamasıdır; zaman süreci varsaymak zorunda değiliz.

Effective induced-consumption slope=$\beta(1-\delta)$; spending multiplier=$1/[1-\beta(1-\delta)]$

Back to English

Government spending is not a lump-sum tax

G_0 artışı doğrudan bir birim toplam harcamadır; γ artışı ise tüketicinin harcanabilir gelirinden bir birim alır, ama tüketim yalnızca β kadar azalır. Bu yüzden kamu harcaması çarpanı $1/D$, götürü vergi çarpanı $-\beta/D$’dir. p46’daki $1/D$ ifadesinin yanına “tax multiplier” yazılması bir etiket hatasıdır; türev G_0’ya göre alındığı için bu kamu harcaması çarpanıdır.

$\partial Y^*/\partial G_0=1/D$; $\partial Y^*/\partial \gamma=-\beta/D$

Back to English

Tax revenue can rise while income falls

$T=\gamma+\delta Y$ denkleminde γ doğrudan +1 etkisi yapar. Aynı anda Y azalınca δY küçülür; dolaylı etki eksi olur. Toplamı $1+\delta(-\beta/D)=(1-\beta)/D$ pozitiftir. Bu ayrım, “gelir düştü, o hâlde vergi geliri kesin düşer” gibi yanlış bir yorumu önler. “Vergi oranını artırmak her ekonomide geliri artırır” gibi genel bir iddia da kurmuyoruz; sonuç bu doğrusal model ve varsayımlar içindir.

$\partial T^*/\partial \gamma=1-\delta\beta/D=(1-\beta)/D>0$

Back to English

Finite changes versus local derivatives

G_0 10 artarsa $\Delta Y = 10/D$ eşitliği tamdır; çünkü payda değişmez ve G_0 yalnızca payın içinde doğrusal bulunur. β veya δ değiştiğinde ise payda da değişir. Bu yüzden büyük bir vergi oranı değişiminde yalnızca eski türev×değişim yazmak yerine yeni dengeyi doğrudan hesaplamak gerekir. Vergi oranında bir yüzde puanlık artış $\Delta\delta = 0.01$'dir; $\Delta\delta = 1$ değildir.

Exact when D fixed: $\Delta Y = \Delta G_0/D$. Local when δ varies: $\Delta Y \approx (\partial Y^*/\partial \delta)\Delta\delta$

Back to English

ME-08-C1 Question support

Bilinmeyen sırası Y,C,T ise C için hangi sütun değiştirilir?

Return to foundations

ME-08-C2 Question support

G_0'daki artışın Y^* üzerindeki etkisini soruyoruz.

Return to foundations

ME-08-C3 Question support

Gelir vergisi oranı artışı, diğer verilenler sabitken denge gelirini nasıl etkiler?

Return to foundations

ME-08-C4 Question support

Çarpanı bir sonuç cümlesi olarak yorumla.

Return to foundations

Put the taxed-income model into matrix form - pp43-44

Üç denklem üç bilinmeyen için ortak bir katsayı sistemi kuruyoruz; tüketim denklemindeki parantezi dikkatle açıyoruz.

Source PDF pages 43-44

$Y = C + I_0 + G_0 \rightarrow Y - C = I_0 + G_0$

Y'nin katsayısı 1, C'nin katsayısı −1, T'nin katsayısı 0 olur. Denklemde görünmeyen bilinmeyenin katsayısı sıfırdır.

$C = \alpha + \beta(Y - T) = \alpha + \beta Y - \beta T \rightarrow -\beta Y + C + \beta T = \alpha$

$\beta(Y - T)$ açılınca $\beta Y - \beta T$ elde edilir. βY sola eksi, $-\beta T$ sola artı geçer. C'nin kendi katsayısı +1'dir.

$$T=\gamma+\delta Y \rightarrow -\delta Y+0C+T=\gamma$$

T’nin vergi denklemindeki işareti +1’dir. Kaynaktaki bir el yazısı satırında eksi gibi duran işaret matrise ve sonraki işlemlere aykırıdır; model $T=\gamma+\delta Y$ şeklindedir.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{bmatrix};\ A\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_0+G_0 \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Son bilinmeyen T’dir; kaynak p45’teki bir ara vektörde G harfi görünmesi yazım sürçmesidir. G_0 dışsal kamu harcaması olarak sağ taraftadır.

$$D=1\cdot(1\cdot1-\beta\cdot0)-(-1)\cdot[(-\beta)\cdot1-\beta(-\delta)]+0$$

Birinci satırdaki kofaktör işaretleri +,−,+ şeklindedir. İkinci terimde katsayı −1 olduğu için dıştaki eksiyle çarpımı artı olur.

$$D=1+(-\beta+\beta\delta)=1-\beta+\beta\delta=1-\beta(1-\delta)>0$$

$0<\beta<1$ ve $0<1-\delta<1$ olduğu için $0<\beta(1-\delta)<1$; 1’den bu sayıyı çıkarınca pozitif D kalır. Böylece tek çözüm vardır.

Kaynak okuma notu - PDF 45

Sayısal katsayı matrisi ve sonraki bütün işlemler $T=\gamma+\delta Y$ modelini kullanır. Dışsal G_0 bilinmeyen vektörüne konulmaz.

Back to English

Find Y*, C* and T* by Cramer’s rule - p44

Kaynak p44 bu üç determinantı verip çözümleri istemektedir; burada hiçbir pay determinantını atlamadan tamamlıyoruz.

Source PDF pages 44

$$E=I_0+G_0;\ A_\gamma=\begin{bmatrix} E & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E, yatırım ve kamu harcamasının toplamı için kısaltmadır. Y’nin katsayı sütunu $[E,\alpha,\gamma]^T$ ile değiştirilir.

$$\det(A_\gamma)=E(1-0)-(-1)(\alpha-\beta\gamma)=E+\alpha-\beta\gamma=N$$

İkinci minör $\alpha\cdot1-\beta\gamma$’dir. Önündeki $-(-1)$ bu minörü artı yapar. Böylece Y’nin payında götürü vergi $-\beta\gamma$ olarak kalır.

$$Y^*=(\alpha-\beta\gamma+I_0+G_0)/D$$

D sabittir ve pozitiftir. $Y^*>0$ için payın pozitif olması ayrıca kontrol edilir.

$$Ac=\begin{bmatrix} 1 & E & 0 \\ -\beta & \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma & 1 \end{bmatrix};\ \det(Ac)=(\alpha-\beta\gamma)-E(-\beta+\beta\delta)$$

Birinci minör $\alpha-\beta\gamma$; ikinci minör $-\beta+\beta\delta$ olur. İkinci sütun teriminin kofaktör işareti eksi olduğundan E ile çarpım çıkarılır.

$$C^*=[\alpha-\beta\gamma+\beta(1-\delta)(I_0+G_0)]/D = Y^*-I_0-G_0$$

Tüketimin gelirden yatırım ve kamu harcaması çıkarılarak da elde edilmesi gerekir. $Y^*-E=[N-ED]/D$ ifadesini açarsak aynı paya ulaşırız.

$$A_t=\begin{bmatrix} 1 & -1 & E \\ -\beta & 1 & \alpha \\ -\delta & 0 & \gamma \end{bmatrix};\ \det(A_t)=\gamma-(-1)(-\beta\gamma+\alpha\delta)+E\delta$$

Üçüncü minör $(-\beta)\cdot 0-1\cdot(-\delta)=\delta$'dır; işareti pozitiftir. Ortadaki minör $-\beta\gamma+\alpha\delta$ olur.

$$T^*=[(1-\beta)\gamma+\delta(\alpha+I_0+G_0)]/D = \gamma+\delta Y^*$$

$\gamma-\beta\gamma=(1-\beta)\gamma$. Diğer terimler $\delta\alpha+\delta E$'dir. $\gamma+\delta N/D$ yazıp ortak paydaya getirince de aynı sonuç çıkar.

$$Y^*-T^*=(1-\delta)Y^*-\gamma;\ C^*=\alpha+\beta(Y^*-T^*)$$

Tüketim yalnızca Y'ye değil vergi sonrası gelire bağlıdır. Hesaplanan Y^*, C^*, T^* değerlerini üç orijinal denklemde sınamak, tek bir formül hatasını ortaya çıkarabilir.

Back to English

Government spending and lump-sum-tax effects - pp44,46

G_0 artışı veya azalışı yalnızca Y'yi değil, tüketimi ve vergi tahsilatını da değiştirir. Üçünü birlikte hesaplıyoruz.

Source PDF pages 44,46

$$Y^*=N/D;\ \partial N/\partial G_0=1;\ \partial D/\partial G_0=0$$

β ve δ sabit tutulduğu için payda G_0'ya bağlı değildir. Ceteris paribus koşulunu bu noktada kullanıyoruz.

$\partial Y^*/\partial G_0=[1\cdot D-N\cdot 0]/D^2=D/D^2=1/D>0$

Kaynak bölüm kuralını bu şekilde yazar. Sonuç bir birim kamu harcaması artışının kaç birim denge geliri yarattığını gösterir; yüzdelik bir büyüme oranı değildir.

$C^*=Y^*-I_0-G_0 \rightarrow \partial C^*/\partial G_0=1/D-1=(1-D)/D=\beta(1-\delta)/D>0$

Gelir artışının bir kısmı zaten G_0'daki bir birimlik artıştır. Kalanı tüketim artışıdır. Tüketim çarpanının gelir çarpanından küçük olması bu muhasebeyle tutarlıdır.

$T^*=\gamma+\delta Y^* \rightarrow \partial T^*/\partial G_0=\delta/D>0$

γ ve δ sabit olduğundan vergi tahsilatındaki değişim yalnızca $\delta\cdot dY$ kanalıyla gelir. Vergi gelirini sabit sanmak yanlış olur; sabit olan vergi kuralıdır.

At $D=0.49$: $\partial Y^*/\partial G_0=100/49\approx 2.0408$; $\partial C^*/\partial G_0=51/49\approx 1.0408$; $\partial T^*/\partial G_0=15/49\approx 0.3061$

G_0 bir birim artarsa Y yaklaşık 2.04, C yaklaşık 1.04, T yaklaşık 0.306 birim artar. G_0 bir birim azalırsa işaretler tersine döner; katsayılar aynı kalır.

$\partial Y^*/\partial\gamma=-\beta/D$; $\partial C^*/\partial\gamma=-\beta/D$; $\partial T^*/\partial\gamma=1-\delta\beta/D=(1-\beta)/D$

γ artınca N'nin türevi $-\beta$'dir. I_0, G_0 sabitken $C=Y-I_0-G_0$ olduğundan C'nin tepkisi Y ile aynıdır. T'de doğrudan +1 ile gelirin azalmasından kaynaklanan dolaylı etki birleştirilir.

With fixed β,δ: $\Delta Y^*=\Delta G_0/D$ and $\Delta Y^*=-\beta\Delta\gamma/D$

Payda sabitken bu değişkenler gelir formülünde doğrusal yer alır. Birden fazla şok varsa etkiler toplanabilir; fakat neyin değiştiği açıkça söylenmelidir.

Kaynak okuma notu - PDF 46

Vergi paydada yer alıyor diye her türev vergi çarpanı olmaz. Değiştirilen büyüklük G_0 olduğundan bu kamu harcaması çarpanıdır.

Back to English

The income-tax-rate derivative - p46

Vergi oranı değişince payda değişir; burada yalnızca payı türevlemek yeterli değildir.

Source PDF pages 46

$N=\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma$; $\partial N/\partial\delta=0$; $D=1-\beta+\beta\delta$; $\partial D/\partial\delta=\beta$

γ götürü vergidir ve δ ile birlikte otomatik değişmez. Bu deneyde $\beta,\gamma,\alpha,I_0,G_0$ sabit tutulur.

$\partial Y^*/\partial\delta = (0\cdot D - N\beta)/D^2 = -\beta N/D^2$

Paydanın artışı sonucu küçültür; bölüm kuralındaki eksi işaret bu ekonomik mekanizmayı yansıtır.

$\partial Y^*/\partial\delta = -(\beta/D)(N/D) = -\beta Y^*/D < 0$ when $Y^* > 0$

Kaynakta yapılan sadeleştirme budur. Negatiflik için $\beta>0$, $D>0$ ve $Y^*>0$ koşulları birlikte kullanılır; pozitif gelir koşulunu gizlememek gerekir.

$\partial C^*/\partial\delta = \partial Y^*/\partial\delta = -\beta Y^*/D$

$C = Y - I_0 - G_0$ kimliğini kullanıyoruz. Vergi oranı artınca bu modelde hem gelir hem tüketim azalır.

$\partial T^*/\partial\delta = Y^* + \delta(\partial Y^*/\partial\delta) = Y^*(1-\delta\beta/D) = (1-\beta)Y^*/D > 0$

Doğrudan vergi oranı artışı +Y etkisi; daralan gelirin etkisi $\delta\cdot dY/d\delta$ ile eksidir. Toplam bu modelin varsayımlarında pozitif kalır. Bu sonuç evrensel vergi teorisi iddiası değil, verilen doğrusal yapının sonucudur.

Back to English

All 18 comparative-static derivatives - the p46 exercise completed

Kaynak “18 comparative-static derivatives” diyerek Y^*, C^*, T^* için $\alpha, I_0, G_0, \gamma, \beta, \delta$ değişimlerinin tamamını işaret eder. Aşağıda her grup ve işaret koşulu açıkça verilir.

Source PDF pages 46

α: $\partial Y^*/\partial\alpha = 1/D$; $\partial C^*/\partial\alpha = 1/D$; $\partial T^*/\partial\alpha = \delta/D$

α, N’ye +1 katsayısıyla girer. I_0, G_0 sabitken tüketim gelirin tamamı kadar değişir; vergi geliri δ katı kadar artar. Üç türev de pozitiftir.

I_0: $\partial Y^*/\partial I_0 = 1/D$; $\partial C^*/\partial I_0 = \beta(1-\delta)/D$; $\partial T^*/\partial I_0 = \delta/D$

$C = Y - I_0 - G_0$ ifadesinde I_0 doğrudan da çıkarıldığı için tüketim türevi $1/D - 1$ olur. Bu, gelirin tümünün tüketim olmadığı anlamına gelir.

G_0: $\partial Y^*/\partial G_0 = 1/D$; $\partial C^*/\partial G_0 = \beta(1-\delta)/D$; $\partial T^*/\partial G_0 = \delta/D$

Gelir çarpanı, tüketim çarpanı ve vergi geliri çarpanı farklı büyüklükleri ölçer. Hepsini tek bir “çarpan” adı altında karıştırmayın.

γ: $\partial Y^*/\partial\gamma=-\beta/D$; $\partial C^*/\partial\gamma=-\beta/D$; $\partial T^*/\partial\gamma=(1-\beta)/D$

İlk iki işaret negatiftir; sonuncusu $1-\beta>0$ olduğu için pozitiftir. Vergi tahsilatının artışının birden küçük olması gelirdeki daralma nedeniyle kısmi geri kaybı gösterir.

$\partial Y^*/\partial\beta=[(-\gamma)D-N(-1+\delta)]/D^2=[(1-\delta)N-\gamma D]/D^2=Z/D$

β hem $-\beta\gamma$ teriminde hem D'de bulunduğu için iki etkiyi birlikte alırız. Payı D'ye bölerek $(1-\delta)Y^*-\gamma=Z$ harcanabilir gelirini tanırız.

β: $\partial Y^*/\partial\beta=Z/D$; $\partial C^*/\partial\beta=Z/D$; $\partial T^*/\partial\beta=\delta Z/D$

β artışı ancak harcanabilir gelir pozitifken tüketim ve gelir artırıcı olarak yorumlanır. β'nın artmasını yüzde puan cinsinden verirsek gerçek sayısal değişim örneğin 0.01 olmalıdır. Sonlu büyük değişimde yeni denge hesaplanır.

δ: $\partial Y^*/\partial\delta=-\beta Y^*/D$; $\partial C^*/\partial\delta=-\beta Y^*/D$; $\partial T^*/\partial\delta=(1-\beta)Y^*/D$

Bu üçlü oran vergisinin tüm denge sonuçlarını özetler. 6 grup×3 çıktı=18 türev tamamlandı. İşaretler söylenirken $Y^*>0$ ve gerektiğinde $Z>0$ gibi ekonomik alan koşulları eklenmelidir.

Back to English

Bridge to the market-model review - bottom of p46

Bir sonraki sayfadaki uygulamanın başlangıcını burada kayda geçiriyoruz; türevlerin tamamı ME-09'da çözülür.

Source PDF pages 46 (bottom)

$Q^D=a-bP$; $Q^s=-c+dP$; $Q^D=Q^s$

a,b,c,d>0 varsayılır. Kaynak p46'daki Q* paydasının kısa yazımı tamamlanmamış görünür; p47'de açıkça b+d olarak verilir.

$a-bP=-c+dP \rightarrow a+c=(b+d)P \rightarrow P^*=(a+c)/(b+d)$

Talep ve arz eşitliğindeki eksi işaretler taşınırken a+c ve b+d oluşur.

$Q^*=a-b(a+c)/(b+d)=[a(b+d)-b(a+c)]/(b+d)=(ad-bc)/(b+d)$

$Q^*>0$ için $ad>bc$ gerekir; a,b,c,d pozitifliği tek başına pozitif miktarı garanti etmez. Sekiz piyasa türevi ve grafikli işaret yorumları ME-09'da ele alınır.

Back to English

Cramer’s rule for the two-country model - p43

ME-07’de elde edilen indirgenmiş biçimin Cramer kuralıyla aynı çıkmasını kontrol ediyoruz.

Source PDF pages 43

$$K=\begin{bmatrix} a & -m_2 \\ -m_1 & b \end{bmatrix};\ a=1-c_1+m_1;\ b=1-c_2+m_2;\ D=ab-m_1m_2>0$$

Bu bölümde a,b yalnızca köşegen katsayıların kısaltmasıdır; tüketim veya talep parametreleriyle karıştırılmamalıdır. Sağ taraf $[A_1,A_2]^T$’dir.

$$K_1=\begin{bmatrix} A_1 & -m_2 \\ A_2 & b \end{bmatrix};\ \det(K_1)=A_1b-(-m_2)A_2=bA_1+m_2A_2$$

İkinci sütun değişmez. Eksi ile eksi çarpımı çıkarılırken artıya dönüşür. Kaynakta bir ara Y_1 satırında c_1 görünüyor; doğru $b=1-c_2+m_2$ değeridir, çünkü değiştirmediğimiz sağ alt eleman budur.

$$Y_1^*=[(1-c_2+m_2)A_1+m_2A_2]/D$$

Paydadaki K, sütunu değiştirilmiş K_1 değildir. Orijinal sistemin ortak determinantı kullanılmalıdır.

$$K_2=\begin{bmatrix} a & A_1 \\ -m_1 & A_2 \end{bmatrix};\ \det(K_2)=aA_2-A_1(-m_1)=aA_2+m_1A_1$$

Birinci sütun aynen kalır. A_1 ve A_2’yi bir satıra değil, sabitler vektörü olarak ikinci sütuna yerleştiririz.

$$Y_2^*=[(1-c_1+m_1)A_2+m_1A_1]/D$$

Aynı ekonomik denklemler aynı tek çözümü vermelidir. Bu eşitlik hesaplama yöntemleri arasında güçlü bir doğrulama sağlar.

Kaynak okuma notu - PDF 43

Birinci sütun değiştirilince sağ alt katsayı değişmez; bu katsayı ikinci ülkeye ait $1-c_2+m_2$’dir.

Back to English

The exact numerical source example - p45

Notlardaki sayıları aynen kullanıyoruz; yalnızca erken yuvarlama yerine son adımda yuvarlıyoruz.

Source PDF pages 45

$$E=500+250=750;\ D=1-0.6(1-0.15)=1-0.51=0.49$$

$1-0.15=0.85$; $0.6\cdot0.85=0.51$. Bu nedenle bütün Cramer payları 0.49'a bölünür.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.6 \\ -0.15 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad d=\begin{bmatrix} 750 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Vergi oranı 0.15 olduğundan üçüncü satırın ilk elemanı -0.15'tir. Sabit vergi 50 sağ taraftadır; ikisini karıştırmayın.

$$\det(A_\gamma)=750+200-0.6\cdot50=950-30=920;\ Y^*=920/0.49=92000/49\approx1877.5510$$

Kaynaktaki yaklaşık 1877.5 sonucu erken yuvarlanmıştır. Tam kesir 92000/49'dur; sonraki hesaplarda bunu korumak daha doğrudur.

$$\det(Ac)=(200-30)-750(-0.6+0.09)=170+382.5=552.5$$

$0.6\cdot0.15=0.09$; $-0.6+0.09=-0.51$. $-750\cdot(-0.51)=+382.5$ olur. Hem negatif işaret önemlidir.

$$C^*=552.5/0.49=55250/49\approx1127.5510$$

Ayrıca $Y^*-750=1127.5510$ kontrolü yapılır. Kaynağın 1127.5 değeri yuvarlama düzeyindedir.

$$\det(A_t)=-30+30+50+112.5=162.5;\ T^*=162.5/0.49=16250/49\approx331.6327$$

$(1-0.6)\cdot50+0.15\cdot(200+750)=20+142.5=162.5$ alternatif kısa kontroldür. $T^*\approx331.6327$ sonucunu mutlaka $\gamma+\delta Y^*$ ile de doğrularız.

$$Y^*-T^*=75750/49\approx1545.9184;\ 200+0.6(75750/49)=55250/49$$

Vergi sonrası gelir pozitif olduğundan tüketim ilişkisinin ekonomik yorumu uygundur. 200 otonom tüketimdir; gelir sıfır olsa bile modelde bu terim bulunur.

$Y^*=C^*+500+250$; $T^*=50+0.15Y^*$

Gelir ve tüketim farkı tam 750’dir. Yaklaşık sonuçlarda küçük farklar yuvarlamadan gelebilir; kesirli kontrolde fark sıfırdır.

Kaynak okuma notu - PDF 45

Yuvarlama öğretici içeriği değiştirmez; ancak kontrol ve sonraki hesaplar için tam kesirleri koruyoruz.

Back to English

ME-08-W1 Worked example support

İki politika ayrı deneylerdir: B politikasını A’nın üzerine ekleme. Önce temel dengeyi bul, sonra kamu harcaması ve götürü vergi kanallarını ayır.

$D=1-0.75\cdot0.8=0.4$; $N=80+60+40-0.75\cdot20=165$

Vergi sonrası tüketim eğimi $0.75\cdot0.8=0.6$’dır; bu nedenle $D=0.4$. Otonom talep toplamından götürü verginin tüketim etkisi 15 çıkarılır.

$Y^*=165/0.4=412.5$; $C^*=412.5-100=312.5$; $T^*=20+0.2\cdot412.5=102.5$

Harcanabilir gelir $412.5-102.5=310$’dur. $80+0.75\cdot310=312.5$ tüketim kontrolünü verir.

Policy A: $\Delta Y=20/0.4=50$; $\Delta C=[0.75\cdot0.8/0.4]\cdot20=30$; $\Delta T=(0.2/0.4)\cdot20=10$

Yeni $Y=462.5$, $C=342.5$, $T=112.5$ olur. Yeni gelir kimliği $342.5+60+60=462.5$’tir. İlk doğrudan 20 harcamaya, 30 tüketim artışı eklenir.

Policy B: $\Delta Y=(-0.75/0.4)\cdot8=-15$; $\Delta C=-15$; $\Delta T=[(1-0.75)/0.4]\cdot8=5$

Yeni $Y=397.5$, $C=297.5$, $T=107.5$ olur. γ artık 28’dir; $28+0.2\cdot397.5=107.5$ kontrolünü verir. Doğrudan vergi artışı 8 iken düşen gelir 3 birim oransal vergi kaybı yaratır; net artış 5’tir.

İki politikanın gelir, tüketim ve vergi gelirine neden farklı etkiler yaptığını İngilizce açıkla. B’de doğrudan +8 ile dolaylı −3 etkisini ayır.

Return to the worked example

ME-08-S1 Question support

Üç seviyeyi birlikte bulduktan sonra vergi kuralını sabit tutarak kamu harcaması şokunu uygula.

Gelir artışı neden ilk kamu harcaması artışından büyük? Vergi politikası değişmemişken toplam vergi neden artıyor?

Return to the problem

ME-08-S2 Question support

Aynı 4 birimlik değişim iki farklı dışsal büyüklükte uygulanıyor. İşaret ve ilk turdaki tüketim etkisini birlikte açıklayın.

Aynı büyüklükte kamu harcaması ve götürü vergi artışının neden eşit büyüklükte zıt gelir etkileri olmadığını açıkla.

Return to the problem

ME-08-S3 Question support

Vergi oranı 10 yüzde puan, yani 0.10 artıyor. Payda değiştiği için sonlu değişimi yeni dengeyi hesaplayarak bul.

Oran artışının yönünü, yüzde puan farkını ve türev yaklaşımının neden tam olmadığını İngilizce bir sınav yanıtında birleştir.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-08-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-08-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-08-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-08-S1

D=1−0.5(0.8)=0.6. Keep the tax rule, not total tax revenue, fixed.

G_0 değişince γ ve δ sabit kalır; T içsel olduğu için değişir.

Return and complete your attempt

ME-08-S2

G_0 has coefficient +1 in N; γ has coefficient −β.

Çarpanı isimden ezberlemek yerine Y* payındaki değişkenin katsayısını okuyun.

Return and complete your attempt

ME-08-S3

The numerator stays 120, but the new D is 0.65. At the old equilibrium $\partial Y^*/\partial \delta = -0.5 \times 200/0.6$.

$\Delta\delta = 0.10$ kullan; 10 yazma. Yaklaşık ve tam cevabı aynı isim altında sunma.

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-08-W1 Model interpretation

Holding all other primitives fixed, a 20-unit increase in G_0 raises equilibrium income by 50, consumption by 30 and tax revenue by 10 monetary units. It enters aggregate demand directly and induces further consumption. Separately, an 8-unit rise in lump-sum taxes reduces disposable income and lowers income and consumption by 15 each. Tax revenue rises by only 5 because the direct 8-unit increase is partly offset by a 3-unit loss of proportional tax revenue as income falls. These are comparisons of equilibria, not predictions of adjustment time.

G_0 artışı doğrudan talep enjeksiyonu olduğu için işareti pozitiftir. γ artışı önce harcanabilir geliri azaltır, tüketim daralması geliri düşürür. T'nin tepkisi sadece γ kadar değildir; gelir de değiştiği için δY parçası yeniden hesaplanır. İngilizce yanıtta "holding all other primitives fixed" ifadesi deneyin sınırını, "monetary units" ifadesi birimi ve "equilibrium" ifadesi sonucun statik niteliğini belirtir.

Check the explanation

☐ Names G_0 and γ as separate exogenous changes with other primitives fixed.

☐ Reports ΔY, ΔC, ΔT in monetary units, not percentages.

☐ Explains direct spending injection versus disposable-income contraction.

☐ Explains $\Delta T = 8 + 0.2(-15) = 5$ in policy B.

ME-08-S1 Solution

$D = 0.6$; $N = 60 + 50 + 20 - 0.5 \cdot 20 = 120$; $Y^* = 120/0.6 = 200$

Find income first.

Payda pozitif; pay da pozitif olduğu için gelir ekonomik olarak pozitiftir.

$C^* = 200 - 50 - 20 = 130$; $T^* = 20 + 0.2 \cdot 200 = 60$; $Y^* - T^* = 140$

Recover consumption, taxes and disposable income.

$60 + 0.5 \cdot 140 = 130$ tüketim denklemini doğrular.

$\Delta Y = 12/0.6 = 20$; $\Delta C = 20 - 12 = 8$; $\Delta T = 0.2 \cdot 20 = 4$

Compute exact finite changes because β and δ are unchanged.

Yeni gelir 220, tüketim 138, vergi 64 olur. $138 + 50 + 32 = 220$ ve $20 + 0.2 \cdot 220 = 64$ kontrolleri sağlanır.

Model English interpretation

The 12-unit spending injection induces 8 additional units of consumption, so equilibrium income rises by 20 monetary units, ceteris paribus. The tax rule is unchanged, but tax revenue is endogenous: the extra income generates $\delta\Delta Y = 0.2 \times 20 = 4$ units of additional taxes.

Türkçe reasoning

“Vergi sabit” yerine “vergi kuralı sabit” denmelidir. G_0’nun doğrudan 12 birim etkisine, artan vergi sonrası gelirin yarısının tüketime dönmesiyle 8 birim ek tüketim gelir. Vergi oranı değişmese bile vergi matrahı Y yükseldiği için T artar.

Check your explanation

☐ Separates the initial government-spending injection from induced consumption.

☐ Distinguishes fixed γ,δ from endogenous T.

☐ Reports computed changes with monetary units and ceteris paribus.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-08-S2 Solution

$D = 1 - 0.8 \cdot 0.75 = 0.4$; $\partial Y^*/\partial G_0 = 1/0.4 = 2.5$

The reported number is the government-expenditure multiplier.

Kamu harcaması toplam talebe doğrudan +1 olarak girdiğinden payın türevi 1’dir.

$\partial Y^*/\partial \gamma = -0.8/0.4 = -2$

Lump-sum taxation first lowers consumption by β per tax unit.

Götürü vergi çarpanı hem eksi işaretli hem harcama çarpanından mutlak değerce küçüktür.

$\Delta G_0 = 4 \rightarrow \Delta Y = 2.5 \cdot 4 = 10$; $\Delta\gamma = 4 \rightarrow \Delta Y = -2 \cdot 4 = -8$

Treat the two changes as separate experiments.

İki şoku birlikte uygulamıyoruz. Diğer verilenler sabitken her biri kendi katsayısıyla çarpılır.

Model English interpretation

Government spending enters demand directly, whereas a lump-sum-tax increase reduces disposable income and initially lowers consumption by only β=0.8 per tax unit. Therefore the spending multiplier is 2.5 but the tax multiplier is −2. A separate 4-unit increase in spending raises income by 10; a 4-unit tax increase lowers income by 8, holding the remaining primitives fixed.

Türkçe reasoning

Gelirin vergiyle azaltılan her birimi tamamen tüketilmeyecekti; β=0.8 kadarı tüketilecekti. Bu nedenle vergi artışının ilk talep daraltıcı etkisi, aynı tutardaki doğrudan kamu harcaması etkisinden küçük olur. Negatif işareti unutmak ekonomik mekanizmayı ters çevirir.

Check your explanation

☐ Identifies which derivative is the government-expenditure multiplier.

☐ Explains why a tax unit reduces initial consumption by β rather than one.

☐ Reports the two computed income changes as separate monetary-unit experiments.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-08-S3 Solution

Dnew=1−0.5(1−0.30)=0.65; Ynew=120/0.65=2400/13≈184.6154

Recompute the denominator after the tax-rate change.

$\alpha, I_0, G_0, \beta, \gamma$ sabit olduğundan N=120 kalır; yalnızca δ paydada değişir.

Cnew=2400/13−70=1490/13; Tnew=20+0.30·2400/13=980/13

Recover the other equilibrium outcomes.

T≈75.3846 artarken Y ve C azalır. Yeni harcanabilir gelir (2400−980)/13=1420/13’tür; 60+0.5·1420/13=1490/13 kontrolünü sağlar.

Exact ΔY=2400/13−200=−200/13≈−15.3846

Compare the two equilibrium levels.

Bu sonuç yeni dengeyi doğrudan çözmenin tam sonucudur; türev yaklaşımı değildir.

$(\partial Y^*/\partial \delta)\text{old} = -0.5 \cdot 200/0.6 = -500/3$; $\Delta Y \approx (-500/3) \cdot 0.10 = -50/3 \approx -16.6667$

Use the old derivative for a local approximation.

Türev δ=0.20 noktasındaki eğimdir; 0.10 büyüklüğündeki sonlu değişim boyunca eğim sabit kalmaz. Bu yüzden yaklaşık düşüş tam düşüşten biraz büyüktür.

Model English interpretation

A rise in δ from 0.20 to 0.30 is a 10-percentage-point increase. It reduces the fraction of additional income available for consumption, so equilibrium income falls, ceteris paribus. The exact fall is 200/13≈15.3846 monetary units. The old-equilibrium derivative predicts an approximate fall of 50/3≈16.6667; it is not exact because changing δ also changes the denominator and the slope along the equilibrium relation.

Türkçe reasoning

0.20’den 0.30’a geçiş 10 yüzde puandır; başlangıç oranına göre yüzde artış ise %50’dir, ikisi aynı kavram değildir. Çarpanın sabit olduğu G_0 deneyinden farklı olarak δ değişimi D’yi değiştirdiği için başlangıç eğimi bütün aralık için kullanılamaz. Varsayımlar altında yön negatif kalır fakat büyüklük için tam denge hesabı gerekir.

Check your explanation

☐ Explains the disposable-income and induced-consumption channel.

☐ Distinguishes a percentage-point change from a percent change.

☐ Reports the computed exact change and explicitly labels the derivative estimate as an approximation.

☐ Notes that δ changes D and therefore the slope is not constant.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-08-C1 Answer B

C is the second unknown, so replace the second coefficient column by the full constants vector.

Sıra belirleyicidir. Y için 1., C için 2., T için 3. sütun değiştirilir; sabitler vektörü bütün üç satırıyla yerleştirilir.

If you chose differently: Read the unknown order before selecting a column.

Satır denklemi, sütun bilinmeyeni temsil eder.

ME-08-C2 Answer B

Government spending enters the income numerator with coefficient one.

−β/D götürü verginin çarpanıdır; δ vergi oranıdır. Türevde paydanın sabit kalıp kalmadığını kontrol etmek gerekir.

If you chose differently: Identify which primitive changes and how it enters N.
G_0, $N=\alpha+I_0+G_0-\beta\gamma$ ifadesinde +1 katsayısıyla yer alır.

ME-08-C3 Answer B

Higher proportional taxation reduces disposable-income-induced consumption and equilibrium income.

Parametre olmak etkisiz olmak demek değildir. δ artınca D artar, N sabit kalır; pozitif N/D bu nedenle küçülür. Vergi gelirinin tepkisi ayrı bir sorudur.

If you chose differently: Differentiate $D=1-\beta+\beta\delta$, not just the numerator.
D'nin δ'ya göre türevi +β'dir; bir sabit payı artan pozitif paydaya bölersen sonuç küçülür.

ME-08-C4 Answer B

The multiplier is a level change per monetary unit, not a percentage or adjustment time.

Birimlere dikkat: $\partial Y/\partial G$, parasal gelir birimi / parasal kamu harcaması birimidir. Başlangıç gelirine bölmeden yüzde sonucu söylenemez; zaman denklemi verilmeden süre de bulunamaz.

If you chose differently: Check the units of Y and G_0.
Türev oranı hangi iki büyüklüğün değişimini karşılaştırıyor?

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can replace the correct Cramer column and keep the original determinant as denominator.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can derive all three equilibrium outcomes and verify the original equations.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can distinguish government-spending, lump-sum-tax and tax-rate effects.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can complete and interpret all 18 comparative-static derivatives.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can state conditions, units and ceteris paribus in an English exam answer.

Sonucu sadece hesaplamakla kalmıyorum: hangi dışsal değişikliğin hangi mekanizmayla etki yaptığını, işaretin hangi varsayıma bağlı olduğunu ve sonlu değişimin tam mı yaklaşık mı olduğunu açıklayabiliyorum.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

Visually verified pp43-46 at high resolution. All source replacement determinants, symbol definitions, assumptions, exact numerical example, requested Y/C/T spending effects, 18-derivative exercise and bottom-of-p46 market bridge are included. Checked corrections: p43 Y_1 cofactor must use c_2; p45 tax rule is $T=\gamma+\delta Y$ and unknown is T, with exact fractions replacing premature rounding; p46 1/D is the government-spending multiplier, not the lump-sum-tax multiplier; market Q* denominator is b+d as confirmed p47. Original W1/S1-S3 are independent of the source numbers.

ME-09 Review & Worked Practice

Source PDF pages 46 (market bridge), 47-49; 50 checked overflow

Combine equilibrium algebra, comparative statics, exact arithmetic and matrix verification, then write clear English economic interpretations supported by the model.

Foundations | Derivations | Source examples | Worked example | Independent practice | Türkçe support | Hint levels 1 and 2 | Solutions and English interpretations | Reflection and retry

Before you start

What do I already understand, and which step do I need to explain?

Do not mark a skill “alone” just because a solution looks familiar. A useful attempt includes the model, the operations, the check and the interpretation.

Foundations

Review is reconstruction, not formula hunting

The final notes combine market comparative statics, a two-commodity equilibrium solved two ways, shifted matrix inverses, and multiplication-order checks. Each task starts by identifying the object and its assumptions.

Türkçe explanation

Single-market notation and domains

Demand is $Q^D=a-bP$ and supply is $Q^s=-c+dP$, with $a,b,c,d>0$. P is price and Q is quantity per period. At equilibrium $Q^D=Q^s=Q^*$.

$P^*=(a+c)/(b+d)$; $Q^*=(ad-bc)/(b+d)$

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
P	Price	Fiyat
Q^D,Q^s	Demanded and supplied quantity	Talep edilen ve arz edilen miktar

Symbol	English meaning	Türkçe karşılığı
a	Demand intercept	Talep kesişimi
b	Magnitude of demand slope	Talebin eğim büyüklüğü
c	Magnitude of negative supply intercept	Negatif arz kesişiminin büyüklüğü
d	Supply slope	Arz eğimi

Türkçe explanation

Two commodities: two clearing conditions

With two commodities, each demand equation may depend on both prices. Both markets must clear simultaneously. A positive cross-price coefficient indicates a positive cross-price demand relation within this model.

$Q_1^D = Q_1^s$ and $Q_2^D = Q_2^s$

Türkçe explanation

A shifted matrix is a new matrix

In (A−2I)C=I, first form A−2I. The unknown C is the inverse of that shifted matrix if it exists. Invertibility of A alone does not answer whether A−2I is invertible.

$(A-2I)C=I \Rightarrow C=(A-2I)^{-1}$, if $\det(A-2I)\neq 0$

Türkçe explanation

Associativity is not commutativity

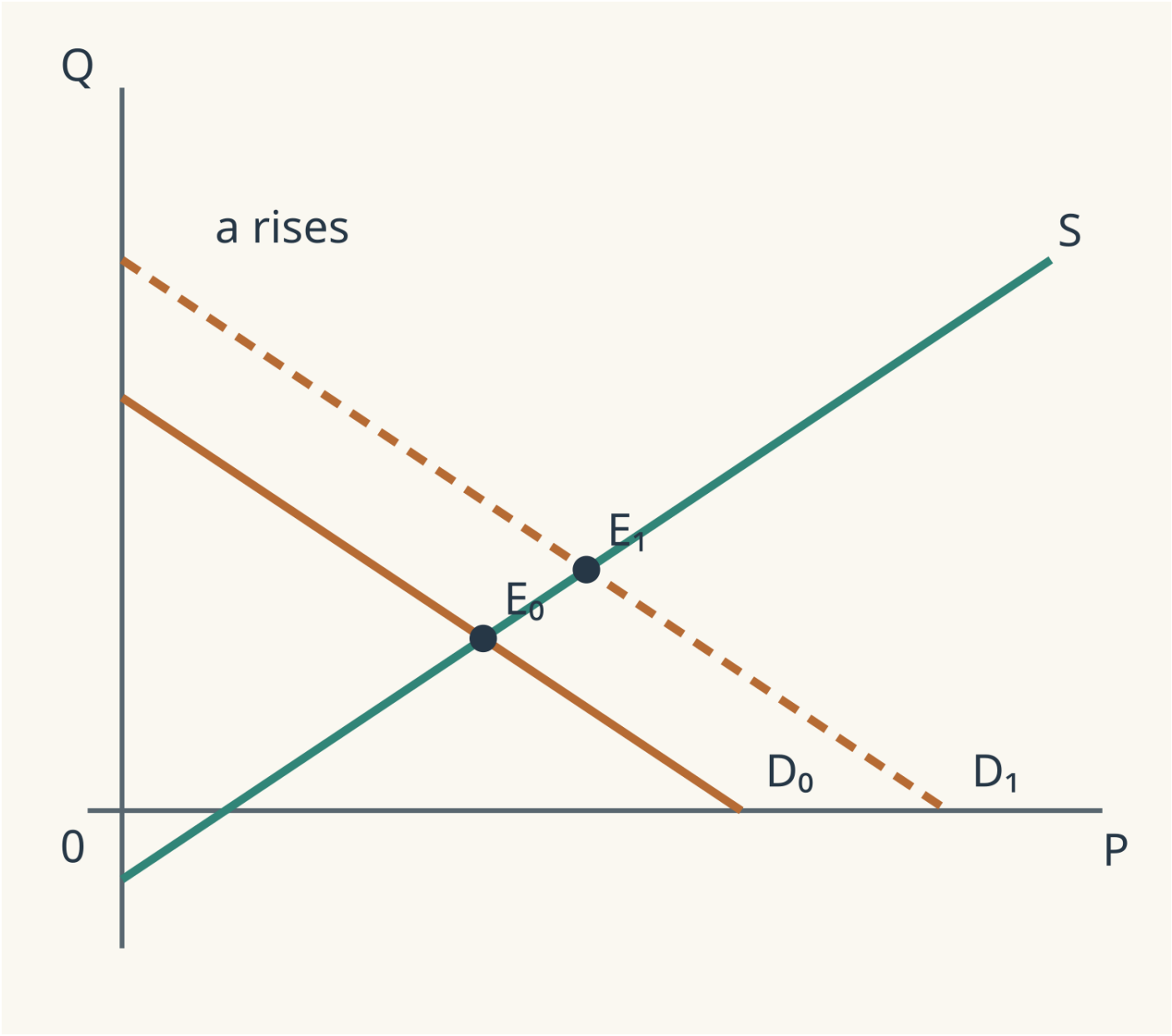
C(BA)=(CB)A changes the brackets but preserves the factor order C,B,A. Dimensions can help choose the cheaper grouping and reject invalid reorderings.

$(1\times 3)(3\times 2)(2\times 4) \rightarrow 1\times 4$

Türkçe explanation

Demand-intercept increase: both price and quantity rise

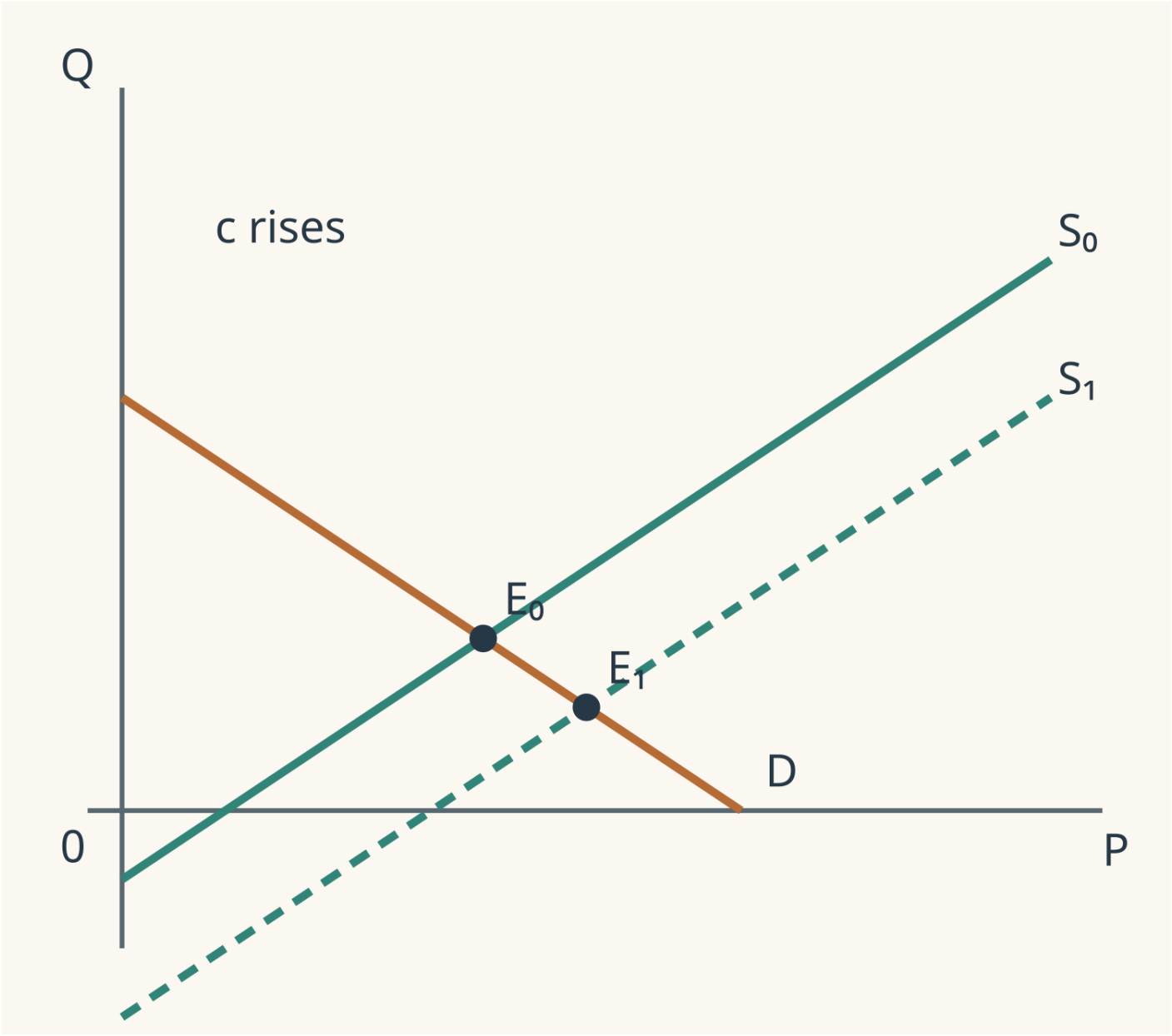
Raising a shifts demand upward at every price. With supply unchanged, the new intersection has higher P* and Q*. The source plots P horizontally and Q vertically.



Türkçe explanation

Supply-intercept magnitude increase: price rises, quantity falls

Because supply is −c+dP, increasing c lowers supply at every fixed price. In the source’s P-horizontal diagram it shifts the supply line down/right; this is a contraction, not a supply expansion.



Türkçe explanation

Do not round a price before calculating quantity

The source prices 3.35 and 3.47 are rounded displays of 57/17 and 59/17. Substituting the rounded values gives slightly distorted quantities.

$P_1^*=57/17$; $P_2^*=59/17$; $Q_1^*=194/17$; $Q_2^*=143/17$

Türkçe explanation

An identity target gives a strong impossibility test

If a candidate matrix has a zero first row, every product with it on the left also has a zero first row. It cannot equal I, whose first row is nonzero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3u & 3v \end{bmatrix} \neq I$$

Türkçe explanation

Pause and test your understanding

ME-09-C1

In $Q^s = -c + dP$, what happens at a fixed price when c increases?

A. Quantity supplied increases.

B. Quantity supplied decreases.

C. Only the demand curve changes.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-09-C2

A=2×4, B=3×2 and C=1×3. Which statement is correct?

A. AB is defined and is 2×2.

B. C(BA) and (CB)A are both defined and are 1×4.

C. CBA is undefined because three matrices cannot be multiplied.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-09-C3

Why can det(A)≠0 be insufficient for solving (A−2I)C=I?

A. The determinant of A−2I, not A, must be nonzero.

B. Identity matrices cannot be subtracted.

C. A−2I always has determinant zero.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

ME-09-C4

A derivative ∂P*/∂a is positive. What can you conclude?

A. A higher a raises equilibrium price with b,c,d held fixed.

B. Price must rise over time even if all parameters stay fixed.

C. Every increase in any parameter raises both price and quantity.

My choice and the reason, before checking

Türkçe question support | Check later

Derivations with reasons

All eight single-market comparative-static derivatives

The source derives the a and c effects; its preceding page asks for the eight derivatives. We complete b and d as well. Let S=b+d>0, R=ad−bc, so P*=(a+c)/S and Q*=R/S.

Source PDF pages 46-47

$$\partial P^*/\partial a=[1\cdot S-(a+c)\cdot 0]/S^2=1/S>0$$

Changing a leaves the denominator unchanged.

$$\partial Q^*/\partial a=[d\cdot S-R\cdot 0]/S^2=d/S>0$$

The derivative of ad−bc with respect to a is d.

$\partial P^*/\partial c = 1/S > 0$; $\partial Q^*/\partial c = [(-b)S - R\cdot 0]/S^2 = -b/S < 0$

A larger c reduces supply at every price.

$\partial P^*/\partial b = [0\cdot S - (a+c)\cdot 1]/S^2 = -(a+c)/S^2 < 0$

A change in b alters the denominator.

$\partial Q^*/\partial b = [(-c)S - R]/S^2 = [-cb - cd - ad + bc]/S^2 = -d(a+c)/S^2 < 0$

Expand the numerator to cancel $-cb+bc$.

$\partial P^*/\partial d = -(a+c)/S^2 < 0$

The denominator grows one-for-one with d.

$\partial Q^*/\partial d = [aS - R]/S^2 = [ab + ad - ad + bc]/S^2 = b(a+c)/S^2 > 0$

Cancel ad terms and factor b.

a↑: P↑,Q↑; b↑: P↓,Q↓; c↑: P↑,Q↓; d↑: P↓,Q↑

Summarize directions while keeping the underlying mechanisms distinct.

Detailed Turkish reasoning

An English interpretation answer has four parts

State the change, the ceteris-paribus condition, the result with units, and the mechanism.

Cause: “An increase in a, holding b,c,d fixed, ...”

Identify the exogenous experiment.

Result: “... raises equilibrium price by 1/(b+d) per unit of a and quantity by d/(b+d).”

Translate derivative magnitudes into marginal effects.

Mechanism: “Demand is higher at each price, so movement along the unchanged upward-sloping supply curve raises both price and quantity.”

Connect the formulas to the economic curves.

Limits: “The comparison is static and assumes an economically admissible equilibrium.”

Avoid unsupported claims about adjustment speed, welfare or universal causality.

Detailed Turkish reasoning

Source examples and checked readings

These examples retain the source numbers and mathematical content. The explanations are newly written. Any checked correction is placed next to the affected calculation.

Source example: market comparative statics and both diagrams - p47

Exact source model: $Q^D=a-bP$, $Q^s=-c+dP$, $a,b,c,d>0$. Find the effects of a and c on equilibrium price and quantity.

Source PDF pages 47

$a-bP=-c+dP \rightarrow P^*=(a+c)/(b+d)$; $Q^*=(ad-bc)/(b+d)$

Reconstruct the reduced forms before differentiating.

$\partial P^*/\partial a=1/(b+d)>0$; $\partial Q^*/\partial a=d/(b+d)>0$

The demand-intercept increase raises both equilibrium outcomes.

$\partial P^*/\partial c=1/(b+d)>0$; $\partial Q^*/\partial c=-b/(b+d)<0$

The supply-intercept magnitude increase raises price and lowers quantity.

At fixed P: $\Delta Q^D=\Delta a$; $\Delta Q^s=-\Delta c$

Use the structural equations to explain the shifts.

Source reading note - PDF 47

In the notes: The supply c-increase note uses “rightward shift”.

Checked form: With P horizontal/Q vertical, c↑ shifts supply down/right and reduces quantity at fixed P. In standard Q-horizontal/P-vertical axes it is an up/left shift.

The economic conclusion is P*↑,Q*↓, a supply contraction. Direction words must be read with the axes.

Türkçe source-example reasoning

Source example: exact two-commodity equilibrium by Cramer - pp47-48

Exact source prompt: “Find the equilibrium prices and quantities simultaneously.” $Q_1^D=18-3P_1+P_2$, $Q_1^s=-2+4P_1$; $Q_2^D=12+P_1-2P_2$, $Q_2^s=-2+3P_2$.

Source PDF pages 47-48

$18-3P_1+P_2=-2+4P_1 \rightarrow 20=7P_1-P_2$

Clear commodity 1.

$12+P_1-2P_2=-2+3P_2 \rightarrow 14=-P_1+5P_2$

Clear commodity 2.

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix};\ A\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 14 \end{bmatrix};\ \det(A)=35-1=34\neq 0$$

Form the simultaneous system and establish uniqueness.

$$\det(A_1)=\det\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}=20\cdot 5-(-1)\cdot 14=114;\ P_1^*=114/34=57/17$$

Replace the first column to find P_1.

$$\det(A_2)=\det\begin{bmatrix} 7 & 20 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}=7\cdot 14-20(-1)=118;\ P_2^*=118/34=59/17$$

Replace the second column to find P_2.

$Q_1^*=-2+4(57/17)=-34/17+228/17=194/17\approx 11.411765$

Use the source supply equation for commodity 1.

$Q_2^*=-2+3(59/17)=-34/17+177/17=143/17\approx 8.411765$

Use the source supply equation for commodity 2.

$Q_1^D=18-3(57/17)+59/17=(306-171+59)/17=194/17$

Check commodity 1 demand equals its supply.

$Q_2^D=12+57/17-2(59/17)=(204+57-118)/17=143/17$

Check commodity 2 demand equals its supply.

Source reading note - PDF 47-48

In the notes: Rounded prices 3.35,3.47 are used to obtain quantities 11.4,8.41.

Checked form: Exact prices:57/17,59/17. Exact quantities:194/17,143/17.

The source decimals are approximations; keep exact values through the substitution step.

Türkçe source-example reasoning

Source example: the second method uses A^{-1} - p48

Solve the same two-commodity system by matrix inversion, not a separate economic model.

Source PDF pages 48

$$\text{adj}(A)=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix};\quad A^{-1}=(1/34)\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Swap the diagonal entries 7,5 and negate the off-diagonal −1 entries.

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{bmatrix}=(1/34)\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 14 \end{bmatrix}=(1/34)\begin{bmatrix} 114 \\ 118 \end{bmatrix}$$

Take both row-column products.

$$P_1^*=57/17;\ P_2^*=59/17$$

The inverse and Cramer methods agree exactly.

Source reading note - PDF 48

In the notes: One intermediate line equates the price vector to an adjugate matrix.

Checked form: The complete relation is $p=A^{-1}d=(\text{adj}(A)/34)d$.

A 2×1 vector cannot equal a 2×2 adjugate; the denominator and constant vector belong to the full multiplication.

Türkçe source-example reasoning

Source example: shifted inverse exists for A but not for B - p48

Exact source prompt: “Consider three matrices” A=[[2,2],[1,5]], B=[[2,0],[3,2]], I=[[1,0],[0,1]]. (a) Find a matrix C satisfying (A−2I)C=I. (b) Is there a matrix D satisfying (B−2I)D=I?

Source PDF pages 48

$$A-2I=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Subtract 2 only from the two diagonal entries.

$$\det(A-2I)=0\cdot3-2\cdot1=-2\neq0$$

A negative nonzero determinant still permits inversion.

$$C=(A-2I)^{-1}=(1/-2)\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Apply the 2×2 inverse formula.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verify the required identity directly.

$$B-2I=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix};\ \det(B-2I)=0$$

The shifted B matrix is singular.

$$\text{For any } D=\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix},\ (B-2I)D=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3u & 3v \end{bmatrix}\neq I$$

No matrix D can satisfy the requested relation.

Türkçe source-example reasoning

Source example: solve the shifted inverse by entry comparison - p49

The note calls this a longer alternative method. It verifies the same C without using the inverse shortcut.

Source PDF pages 49

$$\text{Let } C=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=I$$

Introduce four unknown entries.

$$\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ a+3c & b+3d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiply row by column and equate corresponding entries.

$2c=1 \rightarrow c=1/2;\ 2d=0 \rightarrow d=0$

Use the first row first.

$a+3c=0 \rightarrow a+3/2=0 \rightarrow a=-3/2$; $b+3d=1 \rightarrow b=1$

Substitute the first-row results into the second row.

Türkçe source-example reasoning

Source example: conformability and both groupings of CBA - p49

Exact source matrices: A=[[1,3,2,1],[4,0,1,0]], B=[[1,0],[0,3],[−4,−2]], C=[−2,1,0]. Determine CBA using C(BA)=(CB)A.

Source PDF pages 49

A:2×4; B:3×2; C:1×3. BA:3×4; CB:1×2; CBA:1×4

Check the inner dimensions before computing entries.

$$CB=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Compute the smaller intermediate product first.

$$(CB)A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Multiply the 1×2 row vector by the 2×4 matrix.

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ -12 & -12 & -10 & -4 \end{bmatrix}$$

For the alternative grouping, each B row weights the two rows of A.

$C(BA)=-2[1,3,2,1]+[12,0,3,0]+0[-12,-12,-10,-4]=[10,-6,-1,-2]$

Both groupings agree while preserving the factor order.

Türkçe source-example reasoning

Source page 50: overflow check, no new lesson

Page 50 is graph paper with a thin clipped edge of the duplicated p49 photograph at the top. No new readable mathematical note, equation, example or assumption appears.

Source PDF pages 50

Coverage result: p49 duplicated photograph → p50 clipped overflow; no new readable content.

Record the page rather than silently dropping it.

Türkçe source-example reasoning

Worked example

ME-09-W1 Two markets and a demand shift

Let $Q_1^D=20-2P_1+P_2$, $Q_1^s=-4+3P_1$, $Q_2^D=12+P_1-P_2$, and $Q_2^s=-2+2P_2$. Find both equilibrium prices and quantities. Then raise only the first demand intercept from 20 to 27. Find the exact changes in both prices and both quantities, and explain why market 2 is affected although its own demand intercept did not change.

Türkçe question | Interpretation answer after trying

Before reading the steps: choose a method and say why it applies

---

$20-2P_1+P_2=-4+3P_1 \rightarrow 5P_1-P_2=24$; $12+P_1-P_2=-2+2P_2 \rightarrow -P_1+3P_2=14$

Build the two equilibrium equations.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};\ D=15-1=14;\ A^{-1}=(1/14)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Find the nonsingular coefficient matrix.

Pause. Predict the next operation and justify it before reading on.

$P_1^*=(3\cdot 24+14)/14=43/7$; $P_2^*=(24+5\cdot 14)/14=47/7$

Solve both prices simultaneously.

$Q_1^* = -4 + 3 \cdot 43/7 = 101/7$; $Q_2^* = -2 + 2 \cdot 47/7 = 80/7$

Recover both quantities using supply.

$$\Delta d = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta p = A^{-1}\Delta d = (1/14) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Only the first equilibrium constant changes.

$\Delta Q_1 = 3\Delta P_1 = 9/2$; $\Delta Q_2 = 2\Delta P_2 = 1$

Supply curves remain unchanged, so quantity changes follow their price slopes.

Interpret before reading the model answer

Explain the cross-market mechanism in English. State what is held fixed, interpret the signs of all four changes, and explain why the results are exact rather than derivative approximations.

Say your interpretation aloud; note the main result and one reason

Independent practice

Attempt each problem before the hints. The next page of each problem is for interpretation and checking. Do not use the solution as a copying exercise.

ME-09-S1 Rebuild a market and interpret two intercepts

For $Q^D=30-2P$ and $Q^s=-6+P$, find P* and Q*. In two separate experiments, (A) raise a from 30 to 36; (B) raise c from 6 to 9. Compute the new equilibrium in each case and explain the directions of price and quantity changes.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-09-S1 Interpretation and verification

Write two English sentences contrasting a demand expansion with the supply contraction created by a larger c. Refer to fixed-price quantities rather than relying on the phrase “rightward shift”.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-09-S2 Matrix diagnosis: the shifted object matters

Let A=[[3,1],[2,4]] and B=[[2,1],[0,2]]. Find C satisfying (A−2I)C=I if it exists. Determine whether any D satisfies (B−2I)D=I. Explain your conclusions using determinants or row structure, and do not infer an economic meaning for the matrices unless one is supplied.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-09-S2 Interpretation and verification

Explain why invertibility of the original A and B does not answer the requested equations. State why a numerical matrix result alone is not yet an economic interpretation.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

ME-09-S3 A unique mathematical equilibrium may be infeasible

Suppose $Q^D=8-4P$ and $Q^s=-10+2P$. Compute the algebraic equilibrium. Is it economically admissible if traded quantity must be nonnegative? Find the smallest value of a that gives $Q^*\geq 0$ when $b=4, c=10, d=2$ remain fixed. Explain why positive a,b,c,d do not guarantee a positive equilibrium quantity.

Türkçe prompt | Hint 1 | Hint 2 | Solution after trying

State the model or matrix dimensions, then show a justified solution

Confidence before checking: 0 / 1 / 2 / 3 Help used: none / Turkish / hint 1 / hint 2

ME-09-S3 Interpretation and verification

Write an English exam answer distinguishing existence/uniqueness of the algebraic intersection from economic feasibility. State the strict condition for positive trade and the weak condition for nonnegative trade.

My English interpretation: result, mechanism, conditions and limits

Substitution, dimensions, signs or feasibility check

One step I still need to explain without looking

Compare with the model answer only after writing

Türkçe support

Bu bölüm dili ve gerekçeyi anlamak içindir. Açıklamayı aynen kopyalama; okuduktan sonra kendi çözümüne dön. İngilizce soru sayfalarında yanıtları görmeden deneme yapabilirsin.

Review is reconstruction, not formula hunting

Bir soruda P bir fiyat, başka bir soruda A soyut bir matris olabilir. Aynı harfleri gördüğümüz için aynı anlamı yüklemeyiz. Önce değişkenleri, boyutları, eşitlikleri ve neyin verildiğini tanımlarız. Sonra uygun yöntemi seçer, en sonda sonucu başlangıç koşullarına yerleştirerek kontrol ederiz. Kaynaktaki tamamlanmış ve yarım kalmış çözüm adımlarını aşağıda ayrı ayrı yeniden kuruyoruz.

Back to English

Single-market notation and domains

a talebin miktar ekseni kesişimi, −c arzın miktar ekseni kesişimidir. b>0 talep eğrisinin mutlak eğim büyüklüğü; d>0 arz eğimidir. b ve d, miktar/fiyat birimindedir; a,c miktar birimindedir. Pozitif fiyatı a+c>0 sağlar; pozitif işlem miktarı için ayrıca ad>bc gerekir. Talep ve arzın negatif miktar verdiği uzantıları ekonomik olarak gerçek satış miktarı sanmayın.

$P^*=(a+c)/(b+d)$; $Q^*=(ad-bc)/(b+d)$

Back to English

Two commodities: two clearing conditions

Q_1^D içinde P_2 bulunuyorsa ikinci malın fiyatı birinci mala talebi etkiler. Kaynakta bu katsayı pozitiftir; diğer her şey sabitken P_2 artışı Q_1^D'yi artırır. Bu, model içindeki ikame yönlü çapraz fiyat ilişkisine işaret eder. Ancak iki denge fiyatını bulurken P_2'yi sabit bir sayı gibi seçemeyiz; iki denklemi birlikte çözmek zorundayız.

$Q_1^D=Q_1^s$ and $Q_2^D=Q_2^s$

Back to English

A shifted matrix is a new matrix

2I, yalnızca köşegende 2 bulunan matristir. A−2I yaparken A'nın her elemanından 2 çıkarmayız; sadece köşegen elemanlar iki azalır. Sonra yeni matrisin determinantını hesaplarız. B matrisi terslenebilir olsa bile B−2I tekil olabilir; kaynak bunun açık örneğini verir.

$(A-2I)C=I \Rightarrow C=(A-2I)^{-1}$, if $\det(A-2I)\neq 0$

Back to English

Associativity is not commutativity

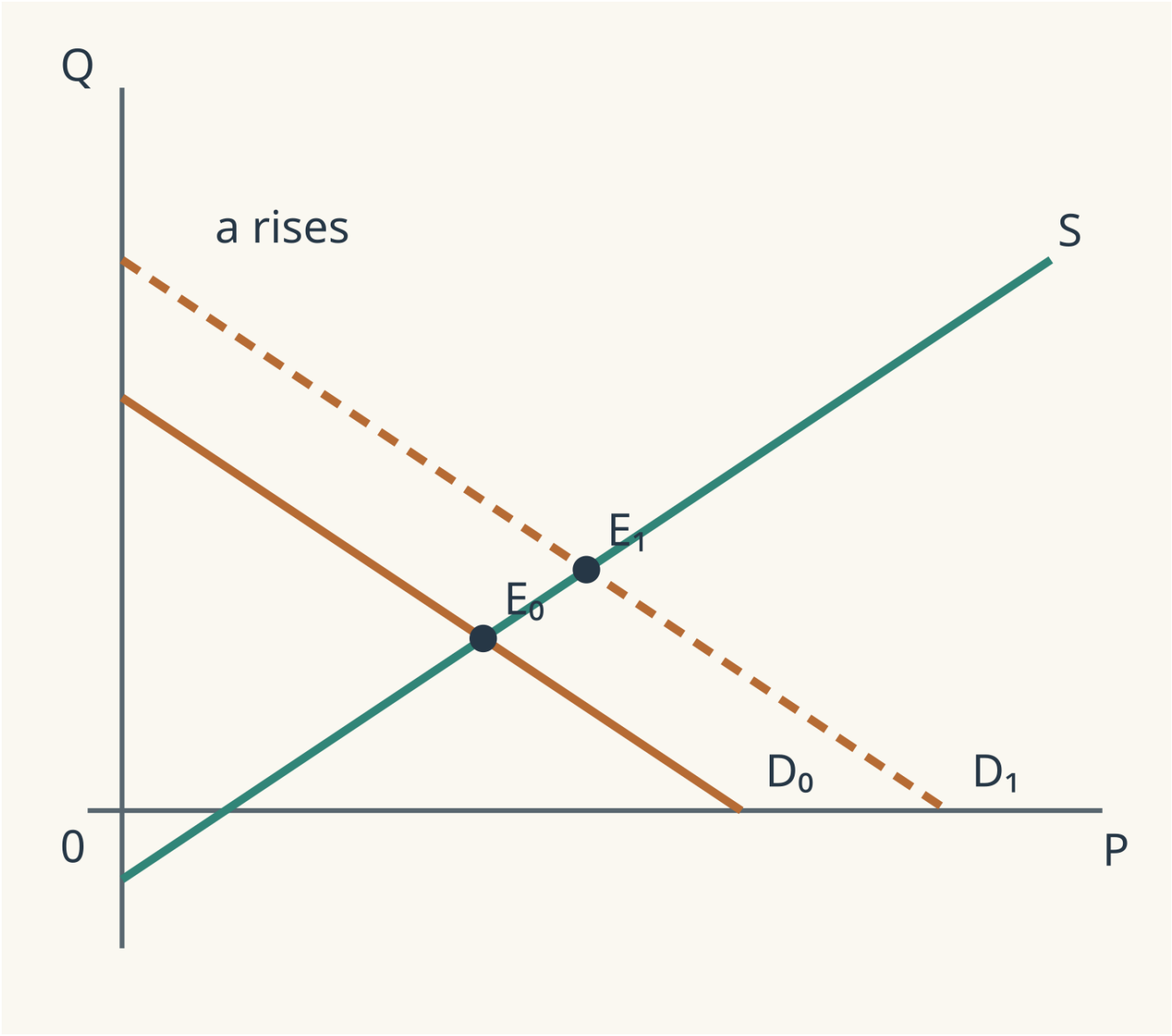
Birleşme özelliği parantezi değiştirir; çarpanların yerini değiştirmez. Kaynakta C 1×3, B 3×2, A 2×4 olduğundan hem C(BA) hem (CB)A tanımlıdır ve 1×4 sonuç verir. Buna karşılık örneğin AB, (2×4)(3×2) olduğundan tanımsızdır. Boyut kontrolü sayıları çarpmaya başlamadan yapılmalıdır.

$$(1\times3)(3\times2)(2\times4) \rightarrow 1\times4$$

Back to English

Demand-intercept increase: both price and quantity rise

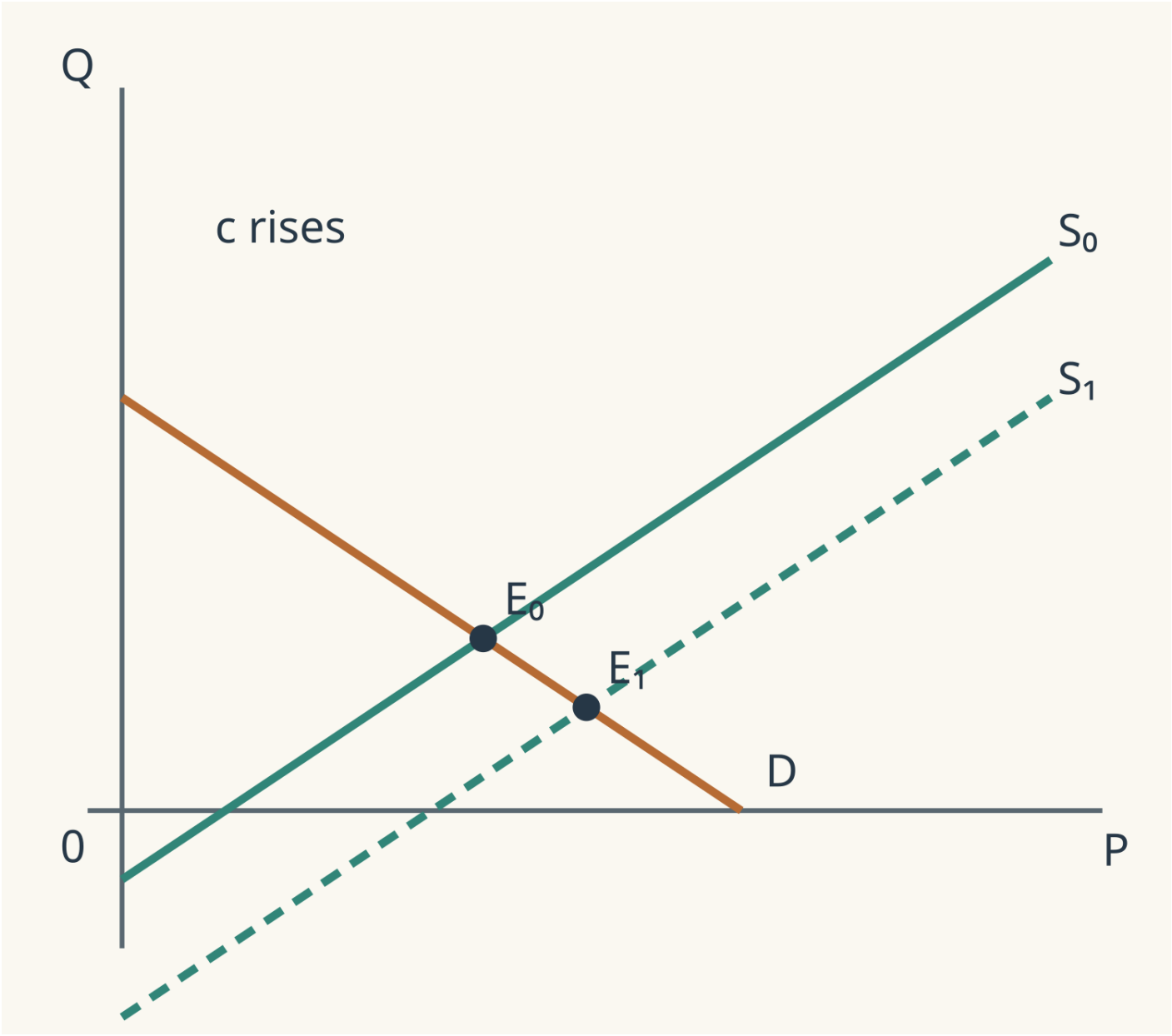
a artışı her fiyat düzeyinde talep miktarını artırır: $\Delta Q^D=\Delta a$. Pozitif eğimli arz üzerinde daha yüksek miktar için daha yüksek fiyat gerekir. Dolayısıyla hem denge fiyatı hem miktarı artar. Şekilde kesik çizgi yeni talep eğrisidir; E_0'dan E_1'e hareket yukarı ve sağadır. Bu görsel kaynak şeklinin eksen düzenini koruyan özgün şematik yeniden çizimdir; kaynakta olmayan sayısal veri olarak okunmamalıdır.



Back to English

Supply-intercept magnitude increase: price rises, quantity falls

c’nin önünde eksi vardır. c artınca Q^s aynı P’de düşer; arz azalmıştır. Kaynak şekli P’yi yatay, Q’yu dikey çizer ve bu yüzden çizgi “sağa” kayıyor gibi tarif edilir. Geleneksel Q-yatay/P-dikey eksenlerde aynı olay arzın yukarı/sola kaymasıdır. Eksenlere bakmadan “sağa kaydıysa arz arttı” sonucunu çıkarmayın. Her iki gösterimde yeni dengede P↑, Q↓ olur.



Back to English

Do not round a price before calculating quantity

P_1=57/17 ve P_2=59/17 tam sonuçlardır. Önce 3.35 ve 3.47'ye yuvarlayıp miktar hesabı yaparsak kaynakta görülen 11.4 ve 8.41 çıkar; tam cevaplar 194/17 ve 143/17'dir. Bu bir yöntem farkı değil, yuvarlama etkisidir. Sınavda mümkünse kesirleri koruyun; en son istenen basamak sayısına yuvarlayın.

P_1^*=57/17; P_2^*=59/17; Q_1^*=194/17; Q_2^*=143/17

Back to English

An identity target gives a strong impossibility test

B−2I=[[0,0],[3,0]] matrisinin ilk satırı sıfırdır. Herhangi bir D ile çarpınca ilk satır yine [0,0] olur. I'nin ilk satırı [1,0] olduğundan (B−2I)D=I imkânsızdır. Bu açıklama determinantın sıfır olduğunu söylemekten daha görünür bir neden sunar.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3u & 3v \end{bmatrix} \neq I$$

Back to English

ME-09-C1 Question support

c'nin önündeki eksi işaretini dikkate al.

Return to foundations

ME-09-C2 Question support

İç boyutları ve çarpan sırasını birlikte kontrol et.

Return to foundations

ME-09-C3 Question support

Tersi alınacak nesneyi dikkatle seç.

Return to foundations

ME-09-C4 Question support

Türevin ceteris paribus anlamını seç.

Return to foundations

All eight single-market comparative-static derivatives

P* ve Q* olmak üzere iki çıktı, a,b,c,d olmak üzere dört parametre vardır: toplam sekiz türev. Bölüm kuralında hem payın hem paydanın değişip değişmediğini kontrol ederiz.

Source PDF pages 46-47

$\partial P^*/\partial a=[1\cdot S-(a+c)\cdot 0]/S^2=1/S>0$

a artışı talep eğrisini kaydırır. Pozitif 1/S, diğer parametreler sabitken denge fiyatının yükseldiğini söyler.

$\partial Q^*/\partial a=[d\cdot S-R\cdot 0]/S^2=d/S>0$

d>0 ve S>0 olduğundan miktar da artar. Fiyat ve miktarın aynı yönde artması talep kayması mekanizmasıyla uyumludur.

$\partial P^*/\partial c = 1/S > 0$; $\partial Q^*/\partial c = [(-b)S - R\cdot 0]/S^2 = -b/S < 0$

Fiyat yükselirken miktar düşer. Kaynakta c değişimi için hem cebir hem grafik bu yönü verir; eksen yönüne bağlı “sağa kayma” ifadesini arz artışıyla karıştırmayın.

$\partial P^*/\partial b = [0\cdot S - (a+c)\cdot 1]/S^2 = -(a+c)/S^2 < 0$

a,c sabitken daha büyük b, her pozitif fiyatta talebi azaltır. Fiyat formülünün payı sabit, paydası büyüktür; denge fiyatı düşer.

$\partial Q^*/\partial b = [(-c)S - R]/S^2 = [-cb - cd - ad + bc]/S^2 = -d(a+c)/S^2 < 0$

$-cd - ad = -d(c+a)$ ortak çarpanına dönüşür. Miktar etkisinin işaretini görmek için bu sadeleştirme yararlıdır.

$\partial P^*/\partial d = -(a+c)/S^2 < 0$

d artınca arz eğrisi Q-P düzleminde daha dik olur ve her pozitif P’de daha fazla arz vardır; diğerleri sabitken fiyat düşer.

$\partial Q^*/\partial d = [aS - R]/S^2 = [ab + ad - ad + bc]/S^2 = b(a+c)/S^2 > 0$

$ab + bc = b(a+c)$ pozitiftir. Böylece d artışı fiyatı düşürüp miktarı artırır. Bu yorumu a,b,c,d>0 ve ekonomik denge alanı içinde yaparız.

a↑: P↑,Q↑; b↑: P↓,Q↓; c↑: P↑,Q↓; d↑: P↓,Q↑

a ve c kesişim parametreleridir; b ve d eğim parametreleridir. “Her parametre artışı aynı tür kaymadır” diye düşünmek yanlıştır. Tüm sonuçlar diğer parametreler sabitken geçerlidir.

Back to English

An English interpretation answer has four parts

İngilizce sınav yanıtında yalnızca “positive” yazmak yerine neden-sonuç cümlesi kurmak gerekir.

Cause: “An increase in a, holding b,c,d fixed, …”

Hangi değişkenin değiştiğini ve hangilerinin sabit olduğunu yazmak, türevin hangi soruyu yanıtladığını netleştirir.

Result: “… raises equilibrium price by 1/(b+d) per unit of a and quantity by d/(b+d).”

Türev bir oran ise birimini belirtin: fiyat birimi / talep kesişimindeki miktar birimi. Hesaplanan seviye P* ile değişim ΔP'yi karıştırmayın.

Mechanism: "Demand is higher at each price, so movement along the unchanged upward-sloping supply curve raises both price and quantity."

Bu cümle fiyatın neden arttığını ve miktarın neden aynı yönde değiştiğini açıklar; salt formül tekrarından daha güçlüdür.

Limits: "The comparison is static and assumes an economically admissible equilibrium."

Verilen modelde refah, gelir dağılımı veya zaman uyarlaması denklemi yoksa bunlar hakkında kesin sonuç yazmayın. Q* pozitifliği gibi alan koşullarını gerekirse ekleyin.

Back to English

Source example: market comparative statics and both diagrams - p47

Kaynağın üst iki fotoğrafı ve alt soldaki devam notu aynı piyasa modelinin karşılaştırmalı statik yorumunu içerir.

Source PDF pages 47

$a-bP=-c+dP \rightarrow P^*=(a+c)/(b+d)$; $Q^*=(ad-bc)/(b+d)$

Eşitlikte fiyatları aynı tarafa, sabitleri diğer tarafa taşırız. Sonra P*'yi talep veya arza koyarak Q* elde ederiz.

$\partial P^*/\partial a=1/(b+d)>0$; $\partial Q^*/\partial a=d/(b+d)>0$

Kaynak diyagramında talep çizgisi D_0'dan D_1'e kayar. P yatay ve Q dikey olduğu için yeni denge eskiye göre sağda ve yukarıdadır.

$\partial P^*/\partial c=1/(b+d)>0$; $\partial Q^*/\partial c=-b/(b+d)<0$

Kaynak diyagramında arz çizgisi daha düşük Q değerleri verecek biçimde aşağı/sağa kayar. Bu bir arz daralmasıdır; piyasa daha yüksek fiyat ve daha düşük miktarda temizlenir.

At fixed P: $\Delta Q^D=\Delta a$; $\Delta Q^s=-\Delta c$

Talep artışını veya arz azalışını tek başına grafiğin görünüşünden değil, denklemin aynı fiyattaki miktar değişiminden tanımlarız. Bu, eksen farklılığından doğan dil karışıklığını çözer.

Kaynak okuma notu - PDF 47

Denklemde $-c$ olduğu için c artışı arzı azaltır. Kaynağın farklı eksen düzeni nedeniyle “sağa” sözcüğü arz artışı olarak yorumlanmamalıdır.

Back to English

Source example: exact two-commodity equilibrium by Cramer - pp47-48

Kaynakta fiyatlar önce Cramer kuralıyla, ardından ters matrisle bulunur. Her iki yöntem ve iki miktar da aşağıda tam kesirlerle tamamlanır.

Source PDF pages 47-48

$$18-3P_1+P_2=-2+4P_1 \rightarrow 20=7P_1-P_2$$

Sabit -2 sola $+2$ geçer; $-3P_1$ sağa $+3P_1$ geçer; P_2 sol biçimde $-P_2$ olarak yazılır. Elde edilen katsayı satırı $[7,-1]$’dir.

$$12+P_1-2P_2=-2+3P_2 \rightarrow 14=-P_1+5P_2$$

$12+2=14$ ve $3P_2+2P_2=5P_2$. P_1 diğer tarafa geçince $-P_1$ olur; satır $[-1,5]$’tir.

$$A=\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix};\ A\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 14 \end{bmatrix};\ \det(A)=35-1=34\neq 0$$

İki fiyat aynı anda bilinmeyendir. Çapraz çarpım $(-1)(-1)=+1$ olduğundan determinant $35-1$’dir; $35+1$ değildir.

$$\det(A_1)=\det\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}=20\cdot 5-(-1)\cdot 14=114;\ P_1^*=114/34=57/17$$

Payın $100+14=114$ olması işaretlerin doğru uygulandığını gösterir. $P_1\approx 3.352941$; miktar hesaplamadan önce bunu yuvarlamıyoruz.

$$\det(A_2)=\det\begin{bmatrix} 7 & 20 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}=7\cdot 14-20(-1)=118;\ P_2^*=118/34=59/17$$

Pay $98+20=118$ olur. $P_2\approx 3.470588$; yine tam kesri koruyoruz.

$$Q_1^*=-2+4(57/17)=-34/17+228/17=194/17\approx 11.411765$$

Kaynağın 3.35 yuvarlanmış fiyatı kullanıldığında 11.4 sonucu oluşur. Tam fiyatla hesaplanan doğru denge miktarı 194/17’dir.

$Q_2^* = -2 + 3(59/17) = -34/17 + 177/17 = 143/17 \approx 8.411765$

Kaynakta 3.47 ile hesaplanan 8.41 yaklaşık değeri bulunur; tam sonuç 143/17'dir.

$Q_1^D = 18 - 3(57/17) + 59/17 = (306 - 171 + 59)/17 = 194/17$

Sadece arzı kullanıp durmayız; talepte P_2'nin etkisini de eklediğimizde aynı miktar gelmelidir.

$Q_2^D = 12 + 57/17 - 2(59/17) = (204 + 57 - 118)/17 = 143/17$

İki denge koşulu da tam sağlanır. Fiyatlar ve miktarlar pozitif olduğundan çözüm bu örnekte ekonomik olarak kabul edilebilirdir.

Kaynak okuma notu - PDF 47-48

Ara adımda yuvarlama miktarlara küçük fark taşır. Kesirler korunursa iki piyasada talep ve arz tam eşit çıkar.

Back to English

Source example: the second method uses A^{-1} - p48

Kaynak sayfanın üst solu ve üst sağı Cramer sonucunu ters matrisle tekrar doğrular.

Source PDF pages 48

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = (1/34) \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Kofaktör transpozunun dışında ortak 1/34 çarpanı bulunur. Kaynaktaki bir ara satırda vektör adj(A)'ya eşitmiş gibi kısaltılmıştır; tam işlem $A^{-1}d$ olmalıdır.

$$\begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{bmatrix} = (1/34) \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \end{bmatrix} = (1/34) \begin{bmatrix} 114 \\ 118 \end{bmatrix}$$

İlk satır $5 \cdot 20 + 1 \cdot 14 = 114$; ikinci satır $1 \cdot 20 + 7 \cdot 14 = 118$ verir. Bölmeden önce sağ taraf vektörüyle çarpma atlanamaz.

$P_1^* = 57/17$; $P_2^* = 59/17$

İki yöntem farklı görünen ama aynı sistemi çözen cebir yollarıdır. Birbirleriyle uyuşmaları güven verir; asıl ekonomik doğrulama yine $Q^D = Q^s$ koşullarıdır.

Kaynak okuma notu - PDF 48

Boyutlar da hatayı gösterir: fiyat vektörü 2×1, adj(A) 2×2’dir. Doğru ifade ortak payda ve sağ taraf vektörüyle birlikte yazılmalıdır.

Back to English

Source example: shifted inverse exists for A but not for B - p48

Matris harfleri bu alıştırmada önceki ekonomi modelinden bağımsız yeniden tanımlanır. Buradaki C tüketim değil bilinmeyen 2×2 matristir.

Source PDF pages 48

$$A-2I=\begin{bmatrix}2&2\\1&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}$$

2I’nin köşegen dışı elemanları sıfırdır; bu nedenle A’nın 2 ve 1 çapraz elemanları değişmez.

$$\det(A-2I)=0\cdot3-2\cdot1=-2\neq0$$

Kaynaktaki |A| etiketi burada aslında A−2I’nin determinantını anlatır. Yeni matrisin tersini aradığımız için kontrol bu yeni matrise aittir.

$$C=(A-2I)^{-1}=(1/-2)\begin{bmatrix}3&-2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/2&1\\1/2&0\end{bmatrix}$$

3/(−2)=−3/2, (−2)/(−2)=1, (−1)/(−2)=1/2 ve 0/(−2)=0. Payda bütün elemanlara uygulanır.

$$\begin{bmatrix}0&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3/2&1\\1/2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Sol üst 0·(−3/2)+2·(1/2)=1; sağ üst 0; sol alt −3/2+3/2=0; sağ alt 1+0=1. İstenen denklem sağlanır.

$$B-2I=\begin{bmatrix}2&0\\3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix};\quad \det(B-2I)=0$$

B’nin kendi determinantı 4 olmasına rağmen B−2I’nin determinantı sıfırdır. B’nin terslenebilirliği bu soruyu çözmez.

$$\text{For any } D=\begin{bmatrix}u&v\\w&z\end{bmatrix},\ (B-2I)D=\begin{bmatrix}0&0\\3u&3v\end{bmatrix}\neq I$$

İlk satır her zaman sıfır olduğu için [1,0] olamaz. Böylece yalnızca ters yok demekle kalmadık; istenen denklemin doğrudan neden imkânsız olduğunu gösterdik.

Back to English

Source example: solve the shifted inverse by entry comparison - p49

Bu yöntem ayrı bir yeni cevap değil; önceki matris tersini eleman eşitliğiyle yeniden bulur.

Source PDF pages 49

$$\text{Let } C=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=I$$

Buradaki a,b,c,d soyut matris elemanlarıdır; piyasa modelindeki parametrelerle aynı nesneler değildir.

$$\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ a+3c & b+3d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

İki matris eşitse aynı konumdaki dört elemanın eşit olması gerekir. Bu bize dört skaler denklem verir.

$2c=1 \rightarrow c=1/2;\ 2d=0 \rightarrow d=0$

2 sıfır olmadığı için her iki denklemi 2'ye bölebiliriz.

$a+3c=0 \rightarrow a+3/2=0 \rightarrow a=-3/2;\ b+3d=1 \rightarrow b=1$

c ve d bulununca a,b denklemleri tek bilinmeyenli olur. C=[[-3/2,1],[1/2,0]] önceki sonuçla aynıdır.

Back to English

Source example: conformability and both groupings of CBA - p49

Kaynak iki aynı fotoğrafla boyutları vurgular; burada sayısal çarpımı da her iki gruplamayla tamamlıyoruz.

Source PDF pages 49

A:2×4; B:3×2; C:1×3. BA:3×4; CB:1×2; CBA:1×4

BA'da içteki 2'ler, CB'de içteki 3'ler eşleşir. C(BA) için (1×3)(3×4), (CB)A için (1×2)(2×4) elde edilir; ikisinin sonuç boyutu 1×4'tür.

$$CB=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$$

İlk eleman $-2\cdot1+1\cdot0+0\cdot(-4)=-2$; ikinci eleman $-2\cdot0+1\cdot3+0\cdot(-2)=3$. Üçüncü B satırının ağırlığı sıfırdır.

$$(CB)A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Elemanlar sırayla $-2\cdot1+3\cdot4=10$; $-2\cdot3+3\cdot0=-6$; $-2\cdot2+3\cdot1=-1$; $-2\cdot1+3\cdot0=-2$ olur.

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ -12 & -12 & -10 & -4 \end{bmatrix}$$

Birinci satır $1\cdot A_1+0\cdot A_2=A_1$; ikinci satır $0\cdot A_1+3\cdot A_2=[12,0,3,0]$; üçüncü satır $-4A_1-2A_2=[-12,-12,-10,-4]$ olur.

$$C(BA)=-2[1,3,2,1]+[12,0,3,0]+0[-12,-12,-10,-4]=[10,-6,-1,-2]$$

Birleşme özelliği sayısal olarak doğrulandı. Daha az ara eleman ürettiği için önce CB’yi hesaplamak bu örnekte daha ekonomiktir; bu, çarpanların sırasını değiştirme izni değildir.

Back to English

Source page 50: overflow check, no new lesson

50. sayfa ayrıca görsel olarak kontrol edilmiştir. Üst kenarda önceki fotoğrafın çok küçük taşan parçası dışında yeni öğretim içeriği yoktur. Bu nedenle yeni bir konu uydurulmamış; p49’daki tekrarlı fotoğraf tek kez eksiksiz işlenmiştir.

Source PDF pages 50

Coverage result: p49 duplicated photograph → p50 clipped overflow; no new readable content.

Bu kayıt “50 sayfanın hepsi kontrol edildi” iddiasını somutlaştırır; boş veya taşan sayfa, içerik atlandığı anlamına gelmez.

Back to English

ME-09-W1 Worked example support

Önce iki piyasayı birlikte temizle. Sonra yalnızca ilk talep kesişimi değişirken diğer bütün katsayıları sabit tut. İkinci piyasanın etkilenme kanalı çapraz fiyat terimidir.

$20-2P_1+P_2=-4+3P_1 \rightarrow 5P_1-P_2=24;\ 12+P_1-P_2=-2+2P_2 \rightarrow -P_1+3P_2=14$

Birinci malın kendi fiyat katsayıları 2+3=5; ikinci malınkiler 1+2=3 olur. Sabit arz kesişimleri sağ tarafa eklenince 24 ve 14 elde edilir.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};\ D=15-1=14;\ A^{-1}=(1/14)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

D=14 olduğu için tek fiyat çifti vardır. Çapraz terimler ters matriste pozitif olur.

$P_1^*=(3\cdot 24+14)/14=43/7;\ P_2^*=(24+5\cdot 14)/14=47/7$

Paylar 86 ve 94'tür; 14'e bölüp sadeleştirince 43/7 ve 47/7 elde edilir.

$Q_1^*=-4+3\cdot 43/7=101/7;\ Q_2^*=-2+2\cdot 47/7=80/7$

Talepte kontrol: $20-2\cdot 43/7+47/7=(140-86+47)/7=101/7$. İkinci talep $(84+43-47)/7=80/7$ verir.

$$\Delta d=\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix};\ \Delta p=A^{-1}\Delta d=(1/14)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Talep kesişimi 7 artınca ilk sağ taraf 24'ten31'e yükselir; ikinci sağ taraf14 kalır. Katsayı matrisi aynı olduğundan değişim hesabı tamdır.

$\Delta Q_1=3\Delta P_1=9/2;\ \Delta Q_2=2\Delta P_2=1$

Yeni fiyatlar 107/14 ve101/14; yeni miktarlar265/14 ve87/7 olur. P_1 artışı ikinci malın talebini çapraz fiyat terimiyle artırdığı için ikinci fiyat ve miktar da yükselir.

Şokun hangi piyasadan başlayıp diğerine hangi terimle geçtiğini, diğer katsayıların sabitliğini ve sonlu değişim hesabının tamlığını açıklayın.

Return to the worked example

ME-09-S1 Question support

A ve B deneylerini birbirinin üzerine uygulamayın. c parametresinin arz denkleminde eksiyle yer aldığını unutmayın.

Sadece “sağa kayma” demek yerine aynı fiyattaki miktar üzerinden iki şoku karşılaştıran İngilizce cümleler yazın.

Return to the problem

ME-09-S2 Question support

Bu soruda iki kaydırılmış matrisin determinantlarını ayrı ayrı kontrol et. Bir katsayı matrisinin kare olması yetmez.

Başlangıç A ve B’nin terslenebilir olmasının soruyu neden çözmediğini, ayrıca ekonomik anlam için neden değişken tanımları gerektiğini açıkla.

Return to the problem

ME-09-S3 Question support

Paydanın pozitif olmasıyla işlem miktarının pozitif olmasını ayır. Bu soru yalnızca denklem çözmeyi değil ekonomik alan kontrolünü ister.

Cebirsel kesişimin tekliği ile ekonomik kabul edilebilirliği ayır. Pozitif ve negatif olmayan miktar koşullarını farklı eşitsizliklerle yaz.

Return to the problem

Hints Level 1 Choose the strategy

Use one hint, then go back and try. The second level gives a more specific intermediate move.

ME-09-S1

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-09-S2

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

ME-09-S3

List what is given and what must be found. Identify the governing equality or matrix operation. Check the dimensions and any nonzero-divisor condition before calculating. Then plan how you will verify the result.

Verilenleri ve bilinmeyenleri ayır. Hangi eşitliğin veya matris işleminin gerektiğini söyle. Önce boyutları ve sıfır olmayan payda koşulunu kontrol et; sonucu nasıl denetleyeceğini planla.

Return and try | If still stuck, hint 2

Hints Level 2 One useful next move

ME-09-S1

b+d=3. A demand intercept change and a negative-supply-intercept magnitude change have different quantity effects.

Başlangıçta P=(30+6)/3. A’da yalnız a, B’de yalnız c değişir.

Return and complete your attempt

ME-09-S2

A−2I=[[1,1],[2,2]]; B−2I=[[0,1],[0,0]].

İlk matriste satırlar bağımlı; ikinci matriste ikinci satır sıfır. Her iki durumda I hedefinin mümkün olup olmadığını düşünün.

Return and complete your attempt

ME-09-S3

Q*=(ad−bc)/(b+d), so the numerator determines the quantity sign when b+d>0.

ad−bc≥0 koşulunu a için çözün. Eşitlik sıfır işlem miktarı sınırıdır.

Return and complete your attempt

Solutions and model interpretations

ME-09-W1 Model interpretation

Holding all other intercepts and slopes fixed, the first demand increase raises P_1 by 1.5 and Q_1 by 4.5 units. The higher P_1 increases demand for commodity 2 through its positive cross-price term, so P_2 rises by 0.5 and Q_2 by 1. The feedback between prices is already included in the simultaneous solution. These finite changes are exact because only the constants vector changes while the linear coefficient matrix remains fixed.

İkinci talebin kendi sabit terimi değişmedi diye ikinci piyasa etkisiz kalmaz. $Q_2^D=12+P_1-P_2$ denkleminde P_1 bulunduğu için ilk piyasadaki fiyat artışı ikinci talebi artırır. İki fiyatın geri beslemesi tek tek sırayla tahmin edilmemiş, ortak sistemde çözülmüştür. Bu sonuçlar genel olarak refah artışı veya zaman içindeki hareket hızı anlamına gelmez.

Check the explanation

☐ Identifies the first demand intercept as the only initial exogenous change.

☐ Explains $P_1\uparrow$ raises Q_2^D through $+P_1$ and therefore P_2, Q_2 rise.

☐ Reports $\Delta P_1=1.5, \Delta P_2=.5, \Delta Q_1=4.5, \Delta Q_2=1$ with suitable units.

☐ Notes that the coefficient matrix remains fixed in a linear system.

ME-09-S1 Solution

$P^*=(30+6)/3=12$; $Q^*=-6+12=6$

Solve the original equilibrium.

Talep $30-2\cdot12=6$ ile arz aynı sonucu verir; miktar pozitiftir.

A: $P^*=(36+6)/3=14$; $Q^*=-6+14=8$; $\Delta P=2, \Delta Q=2$

A higher demand intercept raises both outcomes.

Her fiyatta talep 6 birim artar; değişmeyen arz üzerinde yeni denge daha yüksek fiyat ve miktardadır.

B: $P^*=(30+9)/3=13$; $Q^*=-9+13=4$; $\Delta P=1, \Delta Q=-2$

A larger c reduces supply at each price.

Başlangıç $a=30$ kalır. Arz kesişimi -6'dan -9'a iner; bu yüzden fiyat artarken işlem miktarı azalır.

Model English interpretation

In experiment A, demand is higher at every fixed price, so movement along unchanged supply raises equilibrium price from 12 to 14 and quantity from 6 to 8. In experiment B, increasing c lowers supply at every fixed price; the market therefore clears at a higher price, 13, but a lower quantity, 4, holding the other parameters fixed.

Türkçe reasoning

İki deneyde de fiyat artmasına rağmen miktar yönleri farklıdır; bu ayrım şokun talep mi arz mı tarafından geldiğini gösterir. “c arttı, arz arttı” yanlış olur çünkü yapısal denklemin işareti −c’dir.

Check your explanation

□ States that a↑ increases demand at each fixed price.

□ States that c↑ decreases supply because $Q^s=-c+dP$.

□ Gives P↑Q↑ for A and P↑Q↓ for B.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-09-S2 Solution

$$A-2I=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};\ \det=1\cdot2-1\cdot2=0$$

The first shifted matrix is singular.

Herhangi bir C ile çarpılırsa ikinci satır birinci satırın iki katı olur. I’nin satırları bu ilişkiyi sağlamaz; dolayısıyla böyle bir C yoktur.

$$B-2I=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ \det=0$$

The second shifted matrix is also singular.

Her D ile çarpımın ikinci satırı sıfırdır; I’nin ikinci satırı [0,1] olduğundan böyle bir D de yoktur.

$\det(A)=10\neq0$; $\det(B)=4\neq0$, yet both shifted matrices are singular.

Original invertibility does not survive every shift.

Kontrol edilen nesne A veya B değil A−2I veya B−2I olmalıdır. Örnek bu ayrımı özellikle görünür kılar.

Model English interpretation

The matrices multiplying the unknowns are A−2I and B−2I, not A and B. Both shifted matrices are singular, so neither can produce a two-sided identity inverse; their row structures also directly rule out the requested products. Since no economic variables or units are attached to these matrices, the conclusion is algebraic and no price, income or welfare interpretation is justified.

Türkçe reasoning

Ekonomik yorum yapmak her sayıya ekonomik bir etiket uydurmak değildir. Modelin değişken tanımları yoksa dürüst sonuç cebirsel sonuçtur. Gerçek ekonomik modelde tekillik, dengeyi tek biçimde belirleyemeyen veya tutarsız bir denklem yapısı anlamına gelebilir; hangi durum olduğu sağ tarafla birlikte incelenir.

Check your explanation

☐ Identifies A−2I and B−2I as the relevant coefficient matrices.

☐ Uses zero determinants or row structure to rule out identity products.

☐ Does not invent prices/incomes for unlabeled matrices.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

ME-09-S3 Solution

$P^*=(8+10)/(4+2)=18/6=3$; $Q^*=8-4\cdot 3=-4$

The unique intersection lies at a negative quantity.

Arzda kontrol $-10+2\cdot 3=-4$ verir. Cebir tutarlıdır, fakat negatif işlem miktarı istenen ekonomik alanın dışındadır.

$Q^*\geq 0 \Leftrightarrow (2a-40)/6\geq 0 \Leftrightarrow 2a-40\geq 0 \Leftrightarrow a\geq 20$

Use the positive denominator to preserve the inequality direction.

6>0 olduğundan payın en az sıfır olması gerekir. a=20 sınırda $Q^*=0$; gerçekten pozitif ticaret için a>20 gerekir.

At $a=20$: $P^*=(20+10)/6=5$; $Q^*=0$

Check the boundary directly.

Talep $20-4\cdot 5=0$ ve arz $-10+2\cdot 5=0$ olur. Modelin pozitif miktar bölgesine girişi bu sınırdan başlar.

Model English interpretation

The equations have a unique algebraic intersection at $P=3, Q=-4$, but it is not economically admissible when traded quantity must be nonnegative. Positive parameters ensure $b+d>0$, not $ad-bc>0$. With the given slopes and supply intercept, nonnegative trade requires $a \geq 20$, while strictly positive trade requires $a>20$. The issue is economic feasibility, not failure of the algebra.

Türkçe reasoning

Bir çözümü bulmak, onu ekonomik denge olarak kabul etmekten önceki adımdır. Negatif miktar bulununca matematiği değiştirmeyiz; modelin tanımlı ekonomik alanında bu kesişimin kabul edilemediğini söyleriz. Pozitif parametreler sadece bazı işaretleri garanti eder; miktar için $ad-bc$ ayrıca kontrol edilir.

Check your explanation

☐ Reports and checks the algebraic intersection.

☐ Assesses the sign of traded quantity without pretending the algebra failed.

☐ States separate weak and strict conditions for nonnegative and positive trade.

☐ Explains the role of $ad-bc$ rather than relying only on parameter positivity.

Identify the first wrong or unexplained step. Repair that step on your attempt page; do not copy the whole solution.

Retry from the blank problem

Concept check answers

ME-09-C1 Answer B

At fixed P, $\partial Q^s/\partial c=-1$. This is a supply contraction.

Aynı fiyatta arzın azaldığını doğrudan denklemden okuruz. Grafik yönünü açıklarken eksenleri ayrıca belirtmek gerekir.

If you chose differently: Compare the old and new value of $-c+dP$ at the same P.

c yerine daha büyük bir sayı yazınca $-c$ daha küçük olur.

ME-09-C2 Answer B

BA is 3×4 and CB is 1×2; either grouping gives a 1×4 result.

(1×3)(3×4) ve (1×2)(2×4) çarpımları tanımlıdır. AB'de ise 4 ile 3 eşleşmediği için çarpım tanımsızdır.

If you chose differently: Check one adjacent pair at a time.

Parantez değişebilir; A,B,C sırası değişemez.

ME-09-C3 Answer A

Subtracting 2I changes the matrix and can change its invertibility.

Örneğin $B=[[2,0],[3,2]]$ için $\det(B)=4$ iken $B-2I=[[0,0],[3,0]]$ determinantı sıfırdır. Önce yeni matris kurulur, sonra yeni determinant hesaplanır.

If you chose differently: Name the matrix multiplying C.

C'nin solundaki bütün ifade tek bir katsayı matrisi olarak düşünülür.

ME-09-C4 Answer A

The sign describes one named exogenous change, holding the remaining parameters fixed.

Türev hangi parametreye göre alındıysa yalnızca o deneyin yönünü açıklar. Zaman dinamiği veya diğer parametrelerin etkisi hakkında otomatik sonuç vermez.

If you chose differently: Read both the numerator and denominator labels of the derivative.

∂P*/∂a, P'nin a'ya duyarlılığıdır; t'ye veya d'ye göre türev değildir.

Reflection and a second attempt

For each skill, mark: not yet / with help / alone. “Alone” means you can demonstrate it with the explanation closed.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can derive and interpret all eight market derivatives.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can read a graph with its actual axes rather than relying on shift labels.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can solve both markets with Cramer and inverse methods and retain exact fractions.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can test the shifted matrix itself and verify an identity product.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can preserve matrix order while changing grouping.

☐ Not yet ☐ With help ☐ Alone
I can distinguish a mathematical solution from an economically admissible equilibrium.

İşaret, büyüklük, birim, varsayım ve mekanizmayı birlikte açıklayabiliyorum. Kaynaktaki yuvarlamaları, etiket sürçmelerini ve tekrar fotoğrafları doğru çözümden ayırabiliyorum; çözüme ekonomik anlam verirken modelin söylemediğini uydurmuyorum.

The first step I could not explain, and the check I will use next time

Next attempt: problem ID and date

Progress is manual. Keep the first attempt visible; use a new page or a different pen colour for the retry.

Source scope

High-resolution visual verification of pp47-49 plus p46 market bridge and p50 overflow. All source diagrams, equations, prompts, intermediate matrices and assumptions accounted for. Exact source market values and matrices preserved; corrected premature rounding and an incomplete inverse line explicitly. Both CBA groupings numerically completed as original explanatory extension. p50 is inspected overflow, not a missing unit. Original W1/S1-S3 are clearly distinct and include English economic interpretation prompts, criteria and model answers.

Independent reconstruction

Choose any problem ID. Close the teaching and solution sections. Rebuild the model and check the result from the original data.

Problem ID _____ Date _____

Model and calculation

English interpretation and conditions